



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Dinámica de aplicaciones homogéneas

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el
área Ciencias Matemáticas

Lic. Rodrigo Cardeccia

Director de Tesis: Dr. Santiago Muro
Consejero de estudios: Dr. Daniel Carando

28 de Septiembre, 2020

Dinámica de aplicaciones homogéneas.

Resumen

El objetivo de esta tesis es contribuir a la teoría de los sistemas dinámicos inducidos por una función homogénea en espacios de dimensión infinita. Una aplicación $S : X \rightarrow X$ se dice hipercíclica si existe una órbita densa en el espacio. Es sabido que ningún espacio de Banach admite un polinomio homogéneo hipercíclico. Por otro lado se sabe que algunos espacios de Fréchet admiten polinomios homogéneos hipercíclicos.

Introducimos una noción de conjunto de Julia asociado a un polinomio homogéneo en un espacio de Banach. De las propiedades elementales de dicho conjunto concluimos que toda órbita es nunca densa. Mostramos diversos ejemplos de polinomios homogéneos que son hipercíclicos restringidos a su conjunto de Julia. En particular probamos que todo espacio de Banach, separable y de dimensión infinita admite un polinomio homogéneo distribucionalmente caótico. Probamos que el polinomio $e'_1 \cdot B$ es débil hipercíclico, δ -hipercíclico y Γ -super-cíclico para todo $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ no acotado y tal que 0 es punto de acumulación de Γ . Más aún estas propiedades son realizadas por la misma órbita. Cabe destacar que ningún espacio de Banach admite un polinomio homogéneo hipercíclico. Generalizamos la construcción a espacios de Banach arbitrarios.

Exhibimos el primer ejemplo de un polinomio homogéneo hipercíclico en $H(\mathbb{C})$, que es una fuente histórica de ejemplos de operadores hipercíclicos. Probamos que el polinomio $f \rightarrow f(0)f(\cdot + 1)$ es mixing, caótico y frecuentemente hipercíclico. Por otro lado mostramos que el polinomio $f \rightarrow f(0)f'$ no es hipercíclico.

Respondemos una pregunta de Bés y Conejero encontrando operadores bilineales hipercíclicos sin vectores hipercíclicos densos en $X \times X \cdots X$. Más aún, exhibimos el primer operador bilineal hipercíclico en un espacio de Banach y probamos que todo espacio de Banach de dimensión infinita y separable admite un operador bilineal hipercíclico. Respondemos una pregunta de Grosse Erdmann-Kim probando que todo espacio de Banach, separable y de dimensión infinita admite un operador bilineal simétrico bihipercíclico.

Estudiamos \mathcal{F} -hipercíclicidad para dos familias de números naturales relacionadas con la existencia de progresiones aritméticas arbitrariamente grandes. Introducimos las nociones de \mathcal{AP} -hipercíclicidad y \mathcal{AP}_* -hipercíclicidad para operadores lineales. Mostramos que la noción de \mathcal{AP} -hipercíclicidad es equivalente a que el operador sea hipercíclico y multiple recurrente. Proponemos un criterio simple de \mathcal{AP} -hipercíclicidad que es implicado por el criterio fuerte de Kitai. Exhibimos un ejemplo de un operador que es \mathcal{AP} -hipercíclico y no weakly mixing. Respondemos una pregunta de Costakis-Parisis probando que todo espacio de Banach admite un operador \mathcal{AP} -hipercíclico.

Probamos que para operadores $\omega^*-\omega^*$ continuos las nociones de \mathcal{AP}_* -hipercíclicidad, conjuntos periódicos densos y caoticidad son equivalentes, respondiendo parcialmente una pregunta de Bonilla-Grosse Erdmann. Probamos que para backwardshifts las nociones de ser hipercíclico con conjuntos periódicos densos y caos son equivalentes. Mostramos un ejemplo de un backwardshift en c_0 que es \mathcal{AP}_* -hipercíclico pero no caótico. Finalmente probamos que el espectro de los operadores \mathcal{AP}_* -hipercíclicos es perfecto.

Dynamics of homogeneous mappings

Abstract

The aim of this thesis is to contribute to the theory of dynamical systems induced by a homogeneous mapping acting on an infinite dimensional space. A map $S : X \rightarrow X$ is called hypercyclic provided that there is a dense orbit in the space. It is well known that there are no hypercyclic homogeneous polynomials on Banach spaces. On the other hand some non normable Fréchet spaces are known to support hypercyclic homogeneous polynomials.

We introduce the notion of Julia set associated to a homogeneous polynomial acting on a Banach space. From its basic properties we deduce that every orbit is nowhere dense. We give several examples of homogeneous polynomials being hypercyclic restricted to its Julia set. In particular we prove that every separable and infinite dimensional Banach space supports a distributionally chaotic homogeneous polynomial. We prove that the homogeneous polynomial $e'_1 B$ on ℓ_p is weakly hypercyclic, δ -hypercyclic and Γ -supercyclic for every $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ such that Γ is either unbounded or such that 0 is an accumulation point of Γ . Moreover these properties are achieved by the same orbit. It is worth noticing that no homogeneous polynomial on a Banach space is hypercyclic. We generalize the construction to arbitrary infinite dimensional and separable Banach spaces.

We exhibit the first example of a hypercyclic homogeneous polynomial on $H(\mathbb{C})$, which is a historic source of examples of hypercyclic operators. We prove that the polynomial $f \rightarrow f(0) \cdot f(\cdot + 1)$ is mixing chaotic and frequently hypercyclic. On the other hand we show that the polynomial $f \rightarrow f(0)f'$ is not even hypercyclic.

We answer a question due to Bés and Conejero by finding examples of hypercyclic bilinear operators without a dense set of hypercyclic vectors. Moreover, we exhibit the first example of a hypercyclic bilinear operator on a Banach space. We generalize the construction to arbitrary and separable Banach spaces. We answer a question of Grosse-Erdmann and Kim by proving that every separable and infinite dimensional Banach space supports a bihypercyclic symmetric bilinear operator.

We study \mathcal{F} -hypercyclicity for two families of natural numbers related to the existence of arbitrary long arithmetic progressions. We introduce the notion of \mathcal{AP} -hypercyclicity and \mathcal{AP}_* -hypercyclicity for lineal operators. We prove that the concept of \mathcal{AP} -hypercyclicity is equivalent to the operator being hypercyclic and multiple recurrent. We propose a simple criterion of \mathcal{AP} -hypercyclicity which is implied by the strong Kitai criterion. We exhibit an example of an \mathcal{AP} -hypercyclic operator which is weakly mixing. We answer a question of Costakis-Parisi by proving that every infinite dimensional and separable Banach space supports an \mathcal{AP} -hypercyclic operator.

We answer partially a question of Bonilla-Grosse Erdmann by proving that for $\omega^*-\omega^*$ continuous operators the notions of \mathcal{AP}_* -hypercyclicity, hypercyclicity with dense small periodic sets and chaoticity are equivalent. We prove that for backwardshifts operators the concepts of having dense small periodic sets and being chaotic are equivalent. On the other hand we show an example of a non-chaotic backwardshift on c_0 that is \mathcal{AP}_* -hypercyclic. We study the spectrum of

\mathcal{AP}_* -hypercyclic operators and prove that they are perfect.

Gracias

A Santi por confiar en mi y mostrarme el camino, por estar siempre al pie del cañón.

Al CONICET y a la FCEyN por haberme permitido trabajar de lo que me gusta.

A Gabriel, Juan y Karl por haber aceptado ser jurado tan generosamente.

Al grupo de análisis funcional. Un grupo excelente con el que compartir ideas.

A mis compañeros de oficina 2103 y a los del Hotel de Hilbert.

A los amigos que conocí en estos años.

A mis viejos.

A Vero y Tomi, porque son lo mejor de mi vida.

Introducción

La dinámica lineal es una rama moderna del análisis funcional que surgió en las últimas décadas. El interés general son las iteraciones de una aplicación $F : X \rightarrow X$, donde X es un espacio de Fréchet de dimensión infinita. Tal aplicación se dice hipercíclica si existe $x \in X$ tal que la órbita inducida por F , i.e. $Orb_F(x) := \{F^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en X . La teoría del Caos Lineal es un área de investigación activa que ha experimentado un gran desarrollo en el último cuarto de siglo. Una evidencia de la madurez alcanzada en el área son los libros de texto [13] y [58]. El primer ejemplo de un operador hipercíclico se remonta a Birkhoff [29], quien probó, en otra terminología, que el operador de traslación $\tau_1 : f \rightarrow f(\cdot + 1)$ en el espacio de las funciones enteras de una variable es hipercíclico. Luego, otros ejemplos aparecieron, como el operador de diferenciación (también llamado operador de Mac Lane) $D : f \rightarrow f'$, también en $H(\mathbb{C})$ [71] y el operador de Rolewicz $2B : \ell_p \rightarrow \ell_p$ [82] (donde B es el operador coshift). Sin embargo, el inicio del estudio sistemático en el área se debe principalmente a la tesis doctoral de Kitai [66] y al trabajo de Godefroy y Shapiro [49]. No sólo exhibieron nuevas clases de operadores hipercíclicos, sino que propusieron la noción de caos de Devaney como la más adecuada para operadores. Luego probaron que los ejemplos clásicos de Birkhoff, Mac Lane, y Rolewicz son caóticos. Además propusieron versiones preliminares del criterio de hiperciclicidad, cuya versión moderna es la herramienta más efectiva para probar que un operador es hipercíclico.

Las nociones de caos en el sentido de Devaney e hiperciclicidad frecuente son al día de hoy las nociones de hiperciclicidad más estudiadas. Recordemos que una aplicación $F : X \rightarrow X$ se dice *caótica* (en el sentido de Devaney) si es hipercíclica y el conjunto de puntos periódicos de F , i.e. $\{x : F^n(x) = x \text{ para algún } n\}$ es denso en X . La motivación para estudiar operadores frecuentemente hipercíclicos proviene de la teoría ergódica. Una aplicación F se dice frecuentemente hipercíclica si existe un vector x tal que para todo conjunto abierto U , el conjunto de recurrencia $N_F(x, U) := \{n : F^n(x) \in U\}$ tiene densidad inferior positiva. Esto es, que $\liminf_n \frac{\#\{k \leq n : k \in N_F(x, U)\}}{n} > 0$. Si F es ergódica para una medida μ de soporte total, entonces F es frecuentemente hipercíclica. Más aún el conjunto de vectores hipercíclicos es de medida uno.

Durante los últimos años se ha comenzado a estudiar a los operadores \mathcal{F} -hipercíclicos. Dada una familia (de Furstenberg) \mathcal{F} de números naturales, decimos que un operador T es \mathcal{F} -hipercíclico si existe un vector x tal que para todo abierto no vacío U el conjunto de tiempos de visita $N(x, U) := \{n : T^n(x) \in U\} \in \mathcal{F}$. Luego, si $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y \mathcal{D} denotan a las familias formadas por los conjuntos no vacíos y a los conjuntos con densidad inferior positiva respectivamente, un operador lineal

es hipercíclico si y sólo si es $\mathcal{F}_{\neq\emptyset}$ y es frecuentemente hipercíclico si y sólo si es \mathcal{D} -hipercíclico.

Varias nociones de \mathcal{F} -hiperciclicidad han sido estudiadas, tales como hiperciclicidad \mathcal{U} -frecuente [88], hiperciclicidad reiterativa [25] y más recientemente hiperciclicidad sindética a trozos [80].

A pesar de que la noción de hiperciclicidad fue propuesta para operadores lineales, las mismas nociones tienen sentido para operadores no lineales. En esta dirección, el primer resultado se debe a Bernardes [21], quien probó que ningún polinomio homogéneo (no lineal) puede ser hipercíclico en un espacio normado. De su prueba se puede deducir que, asociado a cada polinomio homogéneo, existe una bola (en adelante *la bola límite*) que es invariante bajo la acción del polinomio. Más aún, toda órbita que entra en la bola límite tiende a 0.

En efecto, dado un polinomio m -homogéneo P y un vector x con $\|x\| \leq \|P\|^{\frac{1}{1-m}}$ entonces x cumple que

$$\|P(x)\| \leq \|P\|\|x\|^m \leq \|P\|\|P\|^{\frac{m}{1-m}} = \|P\|^{\frac{1}{1-m}}.$$

Si denotamos $r_P := \|P\|^{\frac{1}{1-m}}$ entonces hemos probado que $P(r_P\overline{B}_X) \subseteq r_P\overline{B}_X$. Si x es ahora un vector en $r_P B_X$ entonces existe $t > 1$ tal que $tx \in r_P B_X$ y luego

$$\|P^n(x)\| = \frac{\|P^n(tx)\|}{t^{m^n}} \leq \frac{r_P}{t^{m^n}} \rightarrow 0.$$

Probablemente esta sea la razón por la cual la dinámica de los polinomios no lineales, y en particular, de los polinomios homogéneos, haya tenido un desarrollo mucho menor que el caso lineal.

Sin embarbo, el comportamiento de una órbita inducida por un polinomio homogéneo puede ser altamente no trivial y está lejos de ser comprendido. Por ejemplo, en [4] Bernardes mostró que si $P \in \mathcal{P}(^2\ell_2)$ es el polinomio 2-homogéneo

$$P : (a_1, a_2, a_3, \dots) \rightarrow (0, a_1^2, a_2^2, \dots)$$

entonces existe un vector cuya órbita oscila entre infinito y la bola límite. También demostró que todo espacio de Banach separable y de dimensión infinita admite un polinomio homogéneo supercíclico, esto es, existe $x \in X$ tal que $\mathbb{C}Orb_P(x)$ es denso en X . Más recientemente, Peris, Kim y Song [16, 17] probaron que todo espacio separable de Banach de dimensión mayor que uno admite polinomios homogéneos *numéricamente hipercíclicos*. Esto quiere decir que existen vectores $x \in S_X; x^* \in S_{X^*}, x^*(x) = 1$, tal que su órbita numérica, $NorbP(x; x^*) := \{x^*(P^n(x)) : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en \mathbb{C} .

Una de las principales herramientas y conceptos en sistemas dinámicos complejos (de dimensión finita) es la del conjunto de Julia. Este es el conjunto que abarca la dinámica interesante de una aplicación holomorfa. Intentando imitar este espíritu, proponemos un concepto de conjunto de Julia para polinomios homogéneos y estudiamos la dinámica que generan. Esto nos permite demostrar que la dinámica de los polinomios homogéneos puede ser bastante complicada.

Por otro lado, los espacios de Fréchet no normables pueden admitir polinomios homogéneos hipercíclicos. El primero en estudiar este problema fue Peris [77]. Naturalmente, el espacio donde buscó el polinomio fue $H(\mathbb{C})$, que es una fuente histórica de ejemplos. Desafortunadamente hubo

un error irreparable en su prueba. Luego, el mismo autor, exhibió un ejemplo de polinomio homogéneo hipercíclico en el espacio $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ [78]. Más tarde, se presentaron otros ejemplos, en algunos espacios de Köthe (incluyendo $H(\mathbb{D})$) [73] y en algunos espacios de funciones diferenciables sobre la recta real [6].

El espacio $H(\mathbb{C})$ ha sido una fuente histórica de operadores hipercíclicos y creemos que es importante exhibir ejemplos concretos y naturales de polinomios homogéneos hipercíclicos en $H(\mathbb{C})$. Cabe mencionar que en la actualidad no se comprende cuales son los espacios de Fréchet no normables que admiten polinomios homogéneos hipercíclicos. De hecho, el único argumento conocido para demostrar que un espacio de Fréchet de dimensión infinita no admite un polinomio homogéneo hipercíclico es la existencia de la bola límite en espacios normados.

En los últimos años hubo algunos intentos de extender la noción de órbita a operadores multilineales. En este caso todavía no existe un consenso unánime de la noción más adecuada de órbita inducida por un operador multilineal $M : X \times \cdots \times X \rightarrow X$ ya que no hay una iteración natural de un operador multilineal. La primera noción de hiperciclicidad para los operadores bilineales se debió a Grosse-Erdmann y Kim [56]. Dados vectores $x, y \in X$ definieron inductivamente el n -ésimo estado inducido por x, y como los conjuntos $M^0(x, y) = \{x, y\}$ y $M^n(x, y) = \{M(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \cup_{i=0}^{n-1} M^i(x, y)\}$. Finalmente, la órbita inducida por x, y es la unión de los estados. El operador bilineal M se llama *bihipercíclico* si existe alguna órbita sea densa en X . Todavía hay una noción de bola límite. Si ambos vectores $x, y \in \frac{1}{\|M\|} B_X$, entonces toda la órbita está contenida en $\frac{1}{\|M\|} B_X$. A pesar de esta restricción, los autores lograron exhibir operadores bilineales hipercíclicos en cada espacio separable de Banach (incluso en el caso de dimensión finita). Sin embargo, no lograron que el operador bilineal sea simétrico y la siguiente pregunta fue planteada en [56] ¿Admite todo espacio de Banach de dimensión infinita y separable un operador bilineal bihipercíclico simétrico?

La definición de órbita para un operador multilineal no es canónica y hay otras interpretaciones disponibles. Así como el estado n -ésimo de un operador 1-lineal depende solo del paso anterior (es decir, $x_n = T(x_{n-1})$), podría ser deseable que el estado n -ésimo de un operador m -multilineal dependa de los m pasos anteriores. Con esto en mente e inspirados en la teoría de las ecuaciones en diferencias, Bès y Conejero [24] definieron inductivamente la órbita inducida por un operador m -multilineal M con condiciones iniciales x_{-m+1}, \dots, x_0 como $x_1 = M(x_{-m+1}, \dots, x_0)$, $x_n = M(x_{-m+n}, \dots, x_{n-1})$ y $Orb_M\{x_{-m+1}, \dots, x_0\} = \bigcup_{n \geq -m+1} \{x_n\}$. El operador multilineal se dice hipercíclico siempre que alguna órbita sea densa en el espacio. Dado que la órbita en el sentido de Bès y Conejero está contenida en la órbita en el sentido de Grosse Erdmann-Kim, todo operador bilineal hipercíclico es bihipercíclico. De nuevo hay una noción de bola límite: si m -vectores consecutivos x_{m-1}, \dots, x_0 pertenecen a $\|M\|^{\frac{1}{1-m}} B_X$ entonces toda la órbita pertenece a $\|M\|^{\frac{1}{1-m}} B_X$ y tiende a cero. En [24] Bès y Conejero exhibieron ejemplos de operadores multilineales hipercíclicos en algunos espacios Fréchet no normables y demostraron que todo espacio de Fréchet infinito dimensional y separable admite un operador multilineal supercíclico. Sin embargo, no encontraron ejemplos de un operador hipercíclico multilineal en un espacio de Banach ni un ejemplo de un operador hipercíclico multilineal cuyo conjunto de vectores hipercíclicos

en $X \times X \cdots X$ no sea residual. Mostraremos que los vectores hipercíclicos no necesariamente son densos y que todo espacio de Banach de dimensión infinita y separable admite operadores multilineales hipercíclicos.

Contrariamente al caso homogéneo los espacios de Banach sí pueden admitir polinomios hipercíclicos (no homogéneos). Peris [79] notó esto por primera vez cuando demostró que el polinomio $P : (a_n)_n \rightarrow ((a_{n+1} + 1)^2 - 1)_n$ es caótico en ℓ_p . Luego se estudiaron otros ejemplos en [73]. En [72] los autores demostraron que todo espacio complejo de Banach de dimensión infinita y separable admite un polinomio hipercíclico. Más recientemente, Bernardes y Peris [22] exhibieron una amplia clase de espacios de Banach que admiten operadores caóticos, frecuentemente hipercíclicos y distribucionalmente caóticos. En particular, demostraron que todo espacio separable e infinito dimensional, real o complejo, de Banach admite un polinomio hipercíclico.

La tesis está dividida en dos partes. La primera parte (Capítulos 2, 3 y 4) se dedica al estudio de la dinámica de las aplicaciones no lineales homogéneas en espacios de dimensión infinita, mientras que en la segunda parte (Capítulos 5 y 6) estudiamos \mathcal{F} -hiperciclicidad para dos familias de números naturales relacionadas con la existencia de progresiones aritméticas arbitrariamente largas en conexión con caos, y respondemos parcialmente una pregunta de Bonilla y Grosse-Erdmann [33] sobre la caracterización de operadores caóticos en términos de \mathcal{F} -hiperciclicidad. Estos capítulos se pueden leer independientemente de los demás. A continuación, resumimos el contenido de cada capítulo.

Capítulo 1: Dinámica de aplicaciones homogéneas lineales y no lineales. Este capítulo es puramente expositivo e introduce las nociones y resultados que utilizaremos a lo largo de toda la tesis. También presenta un resumen del estado del arte de la teoría de la dinámica inducida por un polinomio en un espacio de dimensión infinita.

Capítulo 2: Órbitas de polinomios homogéneos en espacios de Banach. El capítulo está dedicado al estudio de órbitas de polinomios homogéneos en espacios de Banach. En particular, estamos interesados en explorar cuán grandes y complicadas son las órbitas que nunca alcanzan la bola límite. Introducimos una noción de conjunto de Julia asociada a cada polinomio homogéneo. De sus propiedades básicas deducimos que toda órbita es nunca densa. Damos diferentes ejemplos de polinomios homogéneos que son hipercíclicos restringidos a su conjunto Julia. En particular, mostramos que el polinomio 2 homogéneo que actúa sobre ℓ_p definido como $P = e'_1 \cdot B$ (donde B es el operador coshift) es al mismo tiempo débil hipercíclico (hipercíclico restringido a la topología débil), δ -hipercíclico (la órbita interseca a toda bola de radio δ) y Γ -superíclico ($\Gamma \cdot Orb_P(X)$ es denso en X) para cada subconjunto $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ de modo que Γ sea no acotado o tal que 0 es punto de acumulación de Γ . Además, reproducimos el fenómeno en espacios de Banach arbitrarios separables e infinito dimensionales.

Capítulo 3: Polinomios homogéneos hipercíclicos en $H(\mathbb{C})$. Probamos que el polinomio homogéneo $f \rightarrow f(0) \cdot f(\cdot + 1)$ es mixing, caótico y frecuentemente hipercíclico. La prueba sigue una aplicación cuidadosa del Teorema de Runge. Por otro lado mostramos que el polinomio $f(0) \cdot f'$ no es hipercíclico.

Capítulo 4: Operadores bilineales hipercíclicos en espacios de Banach. En este

capítulo estudiamos la clase de operadores multilineales hipercíclicos en el sentido de Bès-Conejero y en el sentido de Grosse Erdmann-Kim. Con respecto a hiperciclicidad en el sentido de Bès-Conejero proponemos una noción de transitividad para operadores multilineales y probamos que esta noción es equivalente a que el operador sea hipercíclico con conjunto de vectores denso en $\overbrace{X \times X \cdots X}^m$. Luego damos diversos ejemplos de operadores bilineales hipercíclicos en $H(\mathbb{C})$ y ℓ_p sin conjunto de vectores hipercíclicos denso. Probamos que todo espacio de Banach de dimensión infinita y separable admite un operador multilineal hipercíclico.

Con respecto a hiperciclicidad en el sentido de Grosse Erdmann-Kim, aplicamos la noción de conjunto de Julia desarrollada en el Capítulo 2 para probar que todo espacio de Banach separable y de dimensión infinita admite un operador bilineal hipercíclico simétrico.

Los Capítulos 5 y 6 pueden ser leídos en forma independiente a los Capítulos 2, 3 y 4. Estudiamos \mathcal{F} -hiperciclicidad lineal para dos familias de números naturales relacionadas con la existencia de progresiones aritméticas arbitrariamente grandes en conexión a caos.

Por una progresión aritmética de longitud m , paso k y término inicial a nos referimos a un conjunto de la forma

$$a + k, a + 2k, \dots, a + (m - 1)k.$$

Diremos que un conjunto de números naturales tiene progresiones aritméticas arbitrariamente grandes ($A \in \mathcal{AP}$) siempre que podamos encontrar para cada longitud m una progresión aritmética de longitud más grande que m contenida en A . Si existe k tal que dichas progresiones tienen el mismo paso entonces diremos que A admite progresiones aritméticas arbitrariamente grandes de paso fijo ($A \in \mathcal{AP}_*$).

Capítulo 5: Operadores \mathcal{AP} -hipercíclicos. Probamos que un operador es \mathcal{AP} -hipercíclico si y sólo si es hipercíclico y múltiplemente recurrente. Proponemos un criterio simple de \mathcal{AP} -hiperciclicidad que es implicado por el criterio fuerte de Kitai. Mostramos un ejemplo de un operador que es \mathcal{AP} -hipercíclico pero no weakly mixing. Finalmente, respondemos una pregunta de Costakis y Parissis [44] y probamos que todo espacio de Banach separable y de dimensión infinita admite un operador \mathcal{AP} -hipercíclico (y luego múltiplemente recurrente).

Capítulo 6: Operadores \mathcal{AP}_* -hipercíclicos. En este capítulo estudiamos la relación entre los operadores \mathcal{AP}_* -hipercíclicos, operadores con puntos periódicos densos y operadores caóticos.

El Teorema principal del capítulo es que estas nociones son equivalentes para operadores ω^* - ω^* continuos. Exhibimos un ejemplo de un operador coshift pesado en c_0 que es \mathcal{AP}_* -hipercíclico pero no caótico. Finalmente, probamos que los operadores \mathcal{AP}_* -hipercíclicos tienen espectro perfecto.

Índice general

1. Dinámica de aplicaciones homogéneas lineales y no lineales	3
1.1. Sistemas dinámicos topológicos: preliminares y definiciones básicas	3
1.2. Sistemas dinámicos lineales	6
1.2.1. Operadores weakly mixing y el criterio de hiperciclicidad	6
1.2.2. Clases de operadores hipercíclicos	8
1.2.3. Otros resultados	10
1.2.4. Nociones adicionales en dinámica lineal	11
1.2.5. Familias de Furstenberg y \mathcal{F} -hiperciclicidad	12
1.3. Sistemas dinámicos polinomiales en espacios de dimensión infinita	16
1.3.1. Órbitas de polinomios homogéneos en espacios normados	17
1.3.2. Polinomios homogéneos hipercíclicos en espacios de Fréchet	18
1.3.3. Polinomios hipercíclicos	19
2. Órbitas de polinomios homogéneos en espacios de Banach	21
2.1. Conjuntos de Julia para polinomios homogéneos en espacios de Banach	23
2.1.1. Ejemplos de conjuntos de Julia	27
2.2. Polinomios homogéneos δ -hipercíclicos, débil hipercíclicos y Γ -supercíclicos	30
2.2.1. Observaciones sobre δ -hiperciclicidad	31
2.2.2. Observaciones sobre débil hiperciclicidad	32
2.2.3. Observaciones y ejemplos sobre Γ -superciclicidad	33
2.2.4. Un ejemplo inspirador	37
2.2.5. Hiperciclicidad numérica	42
2.3. La clase de polinomios $e'_1 \cdot B$ en $\ell_p(v)$ y $\varphi \cdot B$ en ℓ_p	43
2.3.1. La familia de polinomios $\varphi \cdot B$ en ℓ_p	49
2.4. Existencia de polinomios homogéneos δ -hipercíclicos, débil hipercíclicos y Γ -supercíclicos en espacios de Banach arbitrarios	53
2.4.1. Comentarios finales	55
3. Polinomios homogéneos hipercíclicos en $H(\mathbb{C})$	57
3.1. Un polinomio homogéneo hipercíclico en $H(\mathbb{C})$	57
3.2. Ejemplos de polinomios no hipercíclicos en $H(\mathbb{C})$	64

4. Operadores multilineales hipercíclicos en espacios de Banach	69
4.1. Operadores multilineales hipercíclicos en espacios de Fréchet no normables	71
4.2. Operadores multilineales hipercíclicos en espacios de Banach arbitrarios	78
4.2.1. Un primer ejemplo en ℓ_p	78
4.2.2. Operadores multilineales hipercíclicos en espacios de Banach arbitrarios . .	79
4.3. Existencia de operadores bilineales bihipercíclicos en espacios de Banach arbitrarios	89
5. Operadores \mathcal{AP}-hipercíclicos	93
5.1. Operadores \mathcal{AP} -hipercíclicos y recurrencia múltiple	95
5.1.1. Operadores coshift \mathcal{AP} -hipercíclicos	98
5.1.2. Existencia de operadores \mathcal{AP} -hipercíclicos	99
5.1.3. Un operador \mathcal{AP} -hipercíclico que no es weakly mixing	102
6. Operadores \mathcal{AP}_*-hipercíclicos	109
6.1. Operadores \mathcal{AP}_* -hipercíclicos y operadores caóticos	110
6.2. El espectro de un operador \mathcal{AP}_* -hipercíclico	114
6.3. Operadores coshift	116
6.4. Comentarios finales y preguntas	118

Capítulo 1

Dinámica de aplicaciones homogéneas lineales y no lineales

Este capítulo provee una introducción a la teoría de los sistemas dinámicos en espacios de dimensión infinita. Introduciremos las definiciones clásicas en el contexto general de espacios topológicos, luego abordaremos la teoría lineal en espacios de dimensión infinita y finalmente describiremos los avances recientes en la teoría de los sistemas dinámicos no lineales en espacios de dimensión infinita. El capítulo es puramente expositivo y pretende introducir y motivar los conceptos que usaremos durante toda la tesis.

Los espacios que consideraremos serán de Banach o Fréchet, en ambos casos separables y de dimensión infinita. En esta tesis, la mayoría de los resultados son válidos en el contexto de espacios de Fréchet. Sin embargo, conocemos la validez de algunos resultados solo en el caso Banach. En estos casos especificaremos el marco. Los objetos de estudio serán polinomios homogéneos, operadores multilineales y operadores lineales actuando en X .

1.1. Sistemas dinámicos topológicos: preliminares y definiciones básicas.

En esta sección presentamos las definiciones básicas sobre sistemas dinámicos que utilizaremos en toda la tesis. Estudiaremos estas nociones en el contexto de X que es un espacio de Banach o Fréchet y f es un operador lineal o un polinomio homogéneo (no lineal). Las motivaciones principales provienen de la teoría de los sistemas dinámicos, donde X es un espacio topológico y $f : X \rightarrow X$ es una aplicación continua. Referimos a [46] o [58] para una introducción sobre los sistemas dinámicos.

Un sistema dinámico (discreto) es un par (X, f) donde X es un espacio topológico y $f : X \rightarrow X$ es una función continua. A menudo llamaremos f (cuando X se da por sentado) o $f : X \rightarrow X$ un sistema dinámico.

Definición 1.1.1. *Sea (X, f) sea un sistema dinámico. La órbita con estado inicial x_0 es el*

conjunto $Orb_f(x_0) = \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{N}\}$, donde f^n es la n -ésima iteración de f , $f^n = \overbrace{f \circ f \cdots \circ f}^n$ y $f^0 = Id$.

Estaremos particularmente interesados en sistemas dinámicos que tengan órbitas densas.

Definición 1.1.2. Una aplicación $f : X \rightarrow X$ se dice *hipercíclica* si existe $x_0 \in X$ de modo que $Orb_f(x_0)$ sea denso en X . Tal vector x_0 se llama *hipercíclico*. El conjunto de vectores hiper-cíclicos se denota por $HC(f)$.

Dado que el fenómeno de la hiper-ciclicidad solo ocurre en el caso separable, asumiremos que X es separable. Una noción relacionada es *transitividad*.

Definición 1.1.3. Una aplicación $f : X \rightarrow X$ se llama (topológicamente) *transitiva* siempre que para cada par U, V de conjuntos abiertos no vacíos haya un entero k tal que $f^k(U) \cap V$ no sea vacío.

Por lo general, simplemente diremos que la ap mapa es transitivo. Si el espacio es métrico y completo, el teorema de Baire implica que ambas nociones son equivalentes.

Teorema 1.1.4 (Teorema de transitividad de Birkhoff). Sea X un espacio métrico completo y separable sin puntos aislados. Entonces f es hiper-cíclico si y solo si es transitivo. Además, $HC(f)$ resulta un conjunto G_δ denso.

Definición 1.1.5. Diremos que una aplicación es *mixing* si para cualquier par de conjuntos no vacíos U, V existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $T^{-n}(V) \cap U$ no es vacío.

Definición 1.1.6. Dados conjuntos abiertos no vacíos U, V , $N_f(U, V)$ denotará el conjunto de tiempos de recurrencia $N_f(U, V) = \{n : U \cap f^{-n}(V)\}$ y $N_f(x, V) := \{n : f^n(x) \in V\}$. Cuando la aplicación f se da por sentada, vamos a denotarlos $N(U, V)$ y $N(x, V)$ respectivamente.

Por lo tanto, mixing significa que $N(U, V)$ es cofinito y la transitividad se traduce a que $N(U, V)$ no sea vacío, para cada U, V .

Definición 1.1.7. Si la aplicación $f \oplus f : X \oplus X \rightarrow X \oplus X$ es transitiva, diremos que f es *weakly mixing*.

Teorema 1.1.8. Sean X un espacio topológico y f una aplicación continua. Los siguientes enunciados son equivalentes:

- I) f es weakly mixing;
- II) para cada par de conjuntos abiertos no vacíos U, V , $N(U, V)$ contienen intervalos arbitrariamente largos y
- III) para cada par de conjuntos abiertos no vacíos U, V , $N(U, V) - N(V, U) = \mathbb{N}$.

La condición de que $f \oplus f$ sea transitiva es equivalente a $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$ para cada par de conjuntos no vacíos U_1, U_2, V_1, V_2 . En particular, $N(U, V) \neq \emptyset$ para cada par (U, V) y, por lo tanto, f es transitivo. Por otro lado, si f es mixing, entonces $N(U_j, V_j)$ es cofinito. Por lo tanto, $\bigcap_{j=1}^2 N(U_j, V_j) \neq \emptyset$ y f es weakly mixing.

La última noción dinámica que presentaremos en esta sección es caos en el sentido de Devaney [46, p.50]. Aunque no ha habido una definición universalmente aceptada de caos, la noción de Devaney aísla tres conceptos como características esenciales de caos. Según Devaney, para ser caótico, una aplicación f debe ser transitiva, su conjunto de puntos periódicos debe ser denso y debe tener una dependencia sensible de las condiciones iniciales.

Definición 1.1.9. *Sea (X, f) un sistema dinámico donde X es un espacio métrico. Diremos que x es un punto periódico de f siempre que haya un n tal que $f^n(x) = x$ y diremos que f tiene una dependencia sensible de las condiciones iniciales si existe δ tal que para todo $x \in X$ y cada entorno V de x hay un $y \in V$ y n tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.*

Definición 1.1.10 (Definición de caos de Devaney). *Sea que (X, f) un sistema dinámico donde X es un espacio métrico y f es una aplicación continua. Diremos que f es caótico siempre que:*

- I) f es transitivo;
- II) f tiene puntos periódicos densos y
- III) f tiene una dependencia sensible de las condiciones iniciales.

Estas condiciones no son independientes. En particular, se ha demostrado en [9] que la condición iii) es redundante. Además, si la aplicación f es lineal, hiperciclicidad implica dependencia sensible de las condiciones iniciales. Hay varias nociones desarrolladas de caos como caos en el sentido de Auslander-Yorke [7], lo que significa que f es transitivo y tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales, caos en el sentido de Li-Yorke [70] (ver Definición 1.2.36), Block- Coppel caos [30], caos distribucional [86] (ver Definición 1.2.38). Sin embargo, la definición de Devaney es la más popular y nos referiremos a ella simplemente como caos.

Una técnica importante en la teoría de sistemas dinámicos es la de cuasiconjugación. Permite transferir principios dinámicos de un sistema dinámico (X, f) a (Y, g) .

Definición 1.1.11. *Diremos que un sistema dinámico (Y, g) es quasiconjugado a (X, f) siempre que haya una aplicación continua $\Phi : X \rightarrow Y$ de rango denso tal que $\Phi \circ f = g \circ \Phi$.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \quad ,$$

Cuando la aplicación ϕ es biyectiva con inversa continua, diremos que g se conjugua con f .

Proposición 1.1.12. *Sean $(X, f), (Y, g)$ sistemas dinámico tales que (Y, g) es un cuasiconjugado de (X, f) . Si f es weakly mixing, transitivo, caótico, mixing o hipercíclico, entonces también lo es g .*

1.2. Sistemas dinámicos lineales

Según una opinión ampliamente sostenida, el caos está íntimamente relacionado con la no linealidad. La razón es que en espacios finito dimensionales la dinámica lineal se comporta de manera predecible. De hecho, a través de la forma de Jordan, las iteraciones de un operador lineal de dimensión finita se caracterizan por completo. Es solo en espacios de dimensión infinita cuando ocurre el caos lineal. La primera evidencia de un operador hipercíclico se remonta a 1929, cuando Birkhoff [29] demostró la existencia de funciones enteras patológicas de una variable compleja cuyas traslaciones aproximan a cualquier cualquier otra función compleja de manera uniforme en conjuntos compactos. Por lo tanto, el operador de traslación constituye el primer ejemplo de un operador lineal que tiene una órbita densa. Más tarde Mac Lane [71] en 1952 demostró el mismo fenómeno para los operadores de diferenciación, y Rolewicz [82] en 1969 mostró que los múltiplos de los operadores coshift tienen órbitas densas. Sin embargo, no fue después del Ph.D. de Kitai [66] y el trabajo de Godefroy y Shapiro [49] cuando comenzó una investigación sistemática sobre el caos lineal. No solo descubrieron una clase completamente nueva de operadores hipercíclicos, sino que propusieron aceptar la definición de caos de Devaney como la precisa para operadores lineales. Luego también mostraron que los ejemplos clásicos de Birkhoff, Mac Lane y Rolewicz son caóticos. Por otro lado, Kitai propuso un criterio general para los operadores hipercíclicos que cumple la mayoría de los operadores hipercíclicos (incluidos los tres ejemplos clásicos). El criterio de Kitai se generalizó luego al criterio de hiperciclicidad, que es al día de hoy la técnica más efectiva para demostrar que un operador es hipercíclico.

La teoría de sistemas dinámicos lineales ha experimentado un desarrollo dinámico en las últimas décadas y se ha convertido en un área de investigación bastante activa. Como evidencia de la madurez alcanzada en el área, mencionamos aquí el Teorema de Ansari de que toda potencia de un operador hipercíclico es hipercíclico, el Teorema de Bourdon-Feldman de que cada órbita densa en algún lugar densa también es densa y el Teorema de Ansari-Bernal que en su forma más general establece que cada espacio de Fréchet de dimensión infinita y separable admite un operador mixing (y, por lo tanto, hipercíclico). Por el contrario, ahora sabemos que hay espacios de Banach reflexivos de dimensión infinita sin operadores caóticos.

El objetivo de esta sección es expositivo y pretende introducir la teoría de los operadores hipercíclicos. Referimos a [13, 55, 58], y su referencia dentro para información adicional sobre el tema. En esta sección, asumiremos que X es un espacio de Fréchet de dimensión infinita y separable y que T es un operador lineal en X .

1.2.1. Operadores weakly mixing y el criterio de hiperciclicidad

La técnica más efectiva para demostrar que un operador es hipercíclico es demostrar que satisface el criterio de hiperciclicidad. Esta versión se debe a Bès [28] que refinó los criterios de Kitai y Godefroy-Shapiro.

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio de Fréchet. Diremos que T satisface el criterio de hiperci-*

licidad siempre que haya conjuntos densos X_0, Y_0 y funciones $(S_{n_k})_k$ (no necesariamente lineal o continua) de modo que

- I) $T^{n_k}(x) \rightarrow 0$ para todo $x \in X_0$;
- II) $S_{n_k}(y) \rightarrow 0$ para todo $y \in Y_0$ y
- III) $T^{n_k}S_{n_k}(y) \rightarrow y$ para todo $y \in Y_0$.

Teorema 1.2.2. *Sea X un espacio de Fréchet. Si T satisface el criterio de hiperciclicidad, entonces es hipercíclico.*

Demostración. Mostraremos que T es transitivo. Sean U, V conjuntos abiertos y $x \in U \cap X_0$, $y \in V \cap Y_0$. Si consideramos $x + S_{n_k}(y)$, tenemos que para n_k , $x + S_{n_k}(y) \in U$ y $T^{n_k}(x + S_{n_k}(y)) = T^{n_k}(x) + T^{n_k}S_{n_k}(y) \in V$. Concluimos que T es transitivo. \square

Los operadores hipercíclicos habituales satisfacen el criterio de hiperciclicidad. La razón es que de hecho son weakly mixing. La siguiente caracterización de operadores weakly mixing fue probada por Bès y Peris en [26].

Teorema 1.2.3. *Sea X un espacio de Fréchet y T un operador lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

- I) T satisface el criterio de hiperciclicidad;
- II) Hay una sucesión n_k tal que para toda subsucesión m_k de n_k hay $x \in X$ tal que $\{T^{m_k}(x)\}$ es denso en X y
- III) T es weakly mixing.

Presentamos ahora los ejemplos clásicos debidos a Birkhoff, Mac Lane y Rolewicz.

Ejemplo 1.2.4. Los siguientes operadores son caóticos.

- I) (Operador de Birkhoff) Sea $X = H(\mathbb{C})$ y $\tau_1(f) = f(\cdot + 1)$;
- II) (Operador de Mac Lane) Sea $X = H(\mathbb{C})$ y $D(f) = f'$ y
- III) (Operador de Rolewicz) Sea $X = \ell_p$ o c_0 y $T_\lambda = \lambda B$, donde $|\lambda| > 1$ y B es el operador coshift.

Para exhibir la efectividad del criterio de hiperciclicidad, mostraremos que el operador de Birkhoff es caótico. Demostraremos que satisface el Criterio de Godefroy y Shapiro, que es un caso particular del Criterio de hiperciclicidad.

Teorema 1.2.5 (Criterio de Godefroy y Shapiro). *Sea T un operador lineal en un espacio de Fréchet. Supongamos que $X_0 = \text{span}\{x : T(x) = \lambda x, \text{ con } |\lambda| < 1\}$ y $Y_0 = \text{span}\{x : T(x) = \lambda x, \text{ con } |\lambda| > 1\}$ son densos. Entonces T satisface el criterio de hiperciclicidad y, por lo tanto, es hipercíclico.*

Con un espíritu similar tenemos un resultado para operadores caóticos.

Teorema 1.2.6. *Sea T un operador lineal en un espacio de Fréchet. Entonces los puntos periódicos de T vienen dados por*

$$\text{Per}(T) = \text{span}\{x : T(x) = \lambda x \text{ con } \lambda \in e^{i\mathbb{Q}\pi}\}.$$

Lema 1.2.7 (Aron Markose). *Sea $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ de modo que Γ tenga un punto de acumulación. Entonces $\text{span}(e^{\gamma z} : \gamma \in \Gamma)$ es denso en $H(\mathbb{C})$.*

Prueba de la caoticidad de τ_1 . Los autovectores de τ_1 están dados por $e_\lambda = e^{\lambda z}$. Por lo tanto, si consideramos $X_0 = \text{span}\{e_\lambda : |e^\lambda| < 1\}$, $Y_0 = \{e_\lambda : |e^\lambda| > 1\}$ y $Z_0 = \text{span}\{e_\lambda : |e^\lambda| = 1\}$ se sigue por el Lema de Aron Markose que estos conjuntos son densos en $H(\mathbb{C})$. Según el criterio de Godefroy-Shapiro, el operador es hipercíclico y es caótico debido al Teorema 1.2.6. \square

Otra herramienta efectiva para demostrar que un operador es weakly mixing es mostrar que los vectores con órbitas acotadas son densos.

Teorema 1.2.8. *Sea X sea un espacio de Fréchet y T un operador hipercíclico de manera que los vectores con órbitas acotadas son densos en X . Entonces T es weakly mixing.*

Como un corolario inmediato obtenemos que los operadores caóticos son weakly mixing.

Corolario 1.2.9. *Sean X un espacio de Fréchet y T un operador caótico. Entonces T weakly mixing.*

Uno de los principales problemas en la teoría de los sistemas dinámicos lineales era determinar si todo operador hipercíclico satisface criterio de hiperciclicidad. El problema fue originalmente planteado por Herrero [60] en la forma $T \oplus T$ y respondido negativamente por De la Rosa y Read [45]. Más tarde, Bayart y Matheron encontraron ejemplos en espacios de Banach y Fréchet clásicos [12]. Además, construyeron ejemplos de operadores no weakly mixing con órbitas con alto nivel de recurrencia [14], es decir, operadores de modo que $N(x, U)$ sea grande en un sentido combinatorio aditivo.

1.2.2. Clases de operadores hipercíclicos

Como una generalización del operador de Rolewicz λB en ℓ_p , podemos considerar operadores coshift en espacios de Fréchet con base de Schauder.

Teorema 1.2.10. *Sea X sea un espacio Fréchet con base $\{e_n\}_n$. Supongamos que el operador coshift $B(e_n) = e_{n-1}$ está bien definido. Luego,*

1. *Los siguientes son equivalentes*

- a) *B es hipercíclico;*
- b) *B es weakly mixing y*

c) hay una sucesión de números naturales $(n_k)_k$ tal que $e_{n_k} \rightarrow 0$.

2. Los siguientes son equivalentes

- a) B es mixing y
- b) $e_n \rightarrow 0$.

En cuanto a caos, tenemos un buen resultado para espacios que admiten una base incondicional. Recordemos que que una base $\{e_n\}$ se dice *incondicional* si siempre que $\sum_n a_n e_n \in X$ vale que la serie $\sum_n a_n e_n$ converge incondicionalmente.

Teorema 1.2.11 (Grosse-Erdman). *Sea X un espacio de Banach con base incondicional $\{e_n\}$ y supongamos que el operador coshift $B(e_n) = e_{n-1}$ está bien definido. Entonces los siguientes son equivalentes*

- I) B es caótico;
- II) $\sum_{n=1}^{\infty} e_n \in X$ y
- III) B tiene un punto periódico no trivial.

Los operadores coshift no pesados en espacios pesados están relacionados con los operadores coshift no pesados en espacios no pesados.

Dados los pesos $(\omega_n)_n$ definimos el operador coshift pesado B_ω como la extensión lineal de $B_\omega(e_n) = \omega_n e_{n-1}$. Dados los pesos $(v_n)_n$ definimos el espacio ponderado

$$X(v) := \left\{ x : \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n v_n \in X \right\}. \quad (1.1)$$

Proposición 1.2.12. *Sea X un espacio de Fréchet con base incondicional $\{e_n\}$ y $B(e_n) = e_{n-1}$ un operador coshift bien definido en un espacio pesado $X(v)$. Sea $(\omega_n)_n$ la sucesión de pesos $\omega_n = \frac{v_{n-1}}{v_n}$. Entonces $(B, X(v))$ se conjuga a (B_ω, X) bajo el isomorfismo lineal dado por $\Phi : X(v) \rightarrow X$, $\Phi(e_n) = v_n e_n$.*

$$\begin{array}{ccc} X(v) & \xrightarrow{B} & X(v) \\ \downarrow x_n v_n & & \downarrow x_n v_n \\ X & \xrightarrow{B \frac{v_{n-1}}{v_n}} & X \end{array}$$

Recíprocamente dados pesos $(\omega_n)_n$ consideramos $(v_n)_n$ la sucesión de pesos $v_n = \prod_{j=1}^n \omega_j^{-1}$. Entonces (B_ω, X) se conjuga con $(B, X(v))$ bajo el factor lineal $\bar{\Phi} : X \rightarrow X(v)$ dado por $\bar{\Phi}(e_n) = \prod_{j=1}^n \omega_j$.

Demostración. Notar que Φ es un isomorfismo por definición y que

$$\Phi(B(e_n)) = v_n e_{n-1} = B_\omega(v_n e_n) = B_\omega(\Phi(e_n)).$$

Para la recíproca notar que si $v_n = \prod_{j=1}^n \omega_j^{-1}$, entonces $\frac{v_{n-1}}{v_n} = \omega_n$. □

Como corolario inmediato obtenemos una caracterización de los operadores coshift en ℓ_p .

Corolario 1.2.13. *Supongamos que B_ω es un operador coshift bien definido pesado en ℓ_p o c_0 . Los siguientes enunciados caracterizan hiperciclicidad, mixing y caos, respectivamente.*

$$\sup_n \prod_{j=1}^n \omega_j = \infty; \quad \prod_{j=1}^n \omega_j \rightarrow \infty; \quad \left(\prod_{j=1}^n \omega_j^{-1} \right)_n \in \ell_p.$$

Observación 1.2.14. Consideraremos los espacios $\ell_p(v) := \{(x_n) : x_n^p v_n \in \ell_1\}$ con norma $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j^p v_j \right)^{\frac{1}{p}}$. Esta definición es ligeramente diferente a la dada anteriormente. Sin embargo, es la más precisa para trabajar con ℓ_p . La conjugación de la Proposición 1.2.12 ahora viene dada por $\Phi : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p$, $\Phi(x_n e_n) = x_n v_n^{\frac{1}{p}} e_n$.

Como una generalización de los operadores Mac Lane y Birkhoff, podemos considerar operadores de convolución.

Definición 1.2.15. *Diremos que $T : H(\mathbb{C}) \rightarrow H(\mathbb{C})$ es un operador de convolución siempre que T commute con D .*

Diremos que una función compleja $\varphi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ es de tipo exponencial si existen A, M tal que $|\varphi(z)| \leq A e^{M|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Teorema 1.2.16. *Sea $T : H(\mathbb{C}) \rightarrow H(\mathbb{C})$ un operador lineal. Los siguientes son equivalentes.*

- I) T es un operador de convolución;
- II) $T\tau_1 = \tau_1 T$ y
- III) hay una función compleja φ de tipo exponencial tal que $T = \varphi(D) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j D^j$.

En tal caso, T es caótico.

1.2.3. Otros resultados

A finales de los años 90, Ansari y Bernal demostraron independientemente que todo espacio de Banach de dimensión infinita y separable admite un operador hipercíclico [2, 18]. Más tarde, este resultado fue generalizado a espacios Fréchet no normables por Bonet y Peris [31].

Teorema 1.2.17. *Sea X un espacio de Fréchet de dimensión infinita y separable. Entonces X admite un operador mixing.*

La estrategia de la prueba de los teoremas anteriores sigue dos resultados independientes que son por si mismos interesantes. El primer paso fue dado por Salas [84] quien demostró que cada operador del tipo $Id + B_\omega$, donde B_ω es un operador coshift pesado, es hipercíclico en ℓ_1 (Véase también Teorema 5.1.12 para obtener una prueba de este resultado). Luego, utilizando bases biortogonales de Markushevich, los autores probaron que cada espacio de Banach infinito y

separable admite un operador T que es cuasiconjugado a $Id + B_{\frac{1}{n^2}}$ en ℓ_1 . Bonet y Peris siguieron este enfoque para exhibir en cada espacio de Fréchet un operador que es un cuasiconjugado de algún $Id + B_\omega$ en ℓ_1 . Finalmente, la propiedad de ser mixing fue descubierta por Grivaux, quien demostró que los operadores de Salas $Id + B_\omega$ son mixing [53]

Nos centramos ahora en dos resultados basados en argumentos de conexión. Un ingrediente clave de ambos Teoremas 1.2.19 y 1.2.20 es que el conjunto $HC(T)$ siempre es conexo.

Proposición 1.2.18. *Sea T un operador hipercíclico en un espacio de Fréchet. Entonces $HC(T)$ es conexo.*

Demostración. Sólo observar que si $x \in HC(T)$, entonces, todo polinomio P , $P(T)(x)$ también es un vector hipercíclico. Esto se deduce del hecho de que $P(T)$ y T conmutan. Ahora observamos que $P(T)(x) \subseteq HC(T) \subseteq X$. Como $P(T)(x)$ es arcoconexo, deducimos que $HC(T)$ es conexo. \square

El siguiente teorema fue probado por Ansari [1].

Teorema 1.2.19 (Ansari). *Sea T un operador hipercíclico en un espacio de Fréchet. Entonces para todo natural p $HC(T) = HC(T^p)$. En particular, T es hipercíclico si y solo si T^p es hipercíclico.*

Teorema 1.2.20 (Bourdon-Feldman). *Sea T sea un operador en un espacio de Fréchet. Si $Orb_T(x)$ es en algún lugar denso, es decir, si su clausura tiene interior no vacío, entonces toda la órbita $Orb_T(x)$ es densa en X .*

Los operadores Rolewicz λB son hipercíclicos para $|\lambda| > 1$. Si $|\lambda| < 1$, el operador no es hipercíclico porque tiene una norma inferior a uno. De esta propiedad se puede conjeturar que λT es hipercíclico siempre que T sea hipercíclico y $|\lambda| \geq 1$. Anti intuitivamente, esta propiedad es falsa, ya que Badea, Grivaux y Müller demostraron en [8] que hay un operador hipercíclico T tal que $3T$ es hipercíclico pero $2T$ no lo es. Por otro lado, el resultado es verdadero para $|\lambda| = 1$.

Teorema 1.2.21 (León-Müller). *Sean X sea un espacio de Fréchet y T un operador lineal. Si x satisface que $\{n \in \mathbb{N} : \{\lambda T^n(x), \lambda \in \mathbb{T}\}\}$ es denso en X , entonces x es un vector hipercíclico para todo $\lambda \in \mathbb{T}$. En particular, tenemos que $HC(\lambda T) = HC(T)$ para todo $\lambda \in \mathbb{T}$.*

1.2.4. Nociones adicionales en dinámica lineal

Operadores frecuentemente hipercíclicos

En las últimas décadas se prestó atención a *hiperciclicidad frecuente*. Bayart y Grivaux introdujeron la noción de hiperciclicidad frecuente en [10], donde buscaron vectores hipercíclicos que visitan “con frecuencia” cada conjunto abierto U . Diremos que un subconjunto de los números naturales tiene *densidad inferior positiva* siempre que

$$\text{dens}(A) := \liminf_n \frac{\#\{k \leq n : k \in A\}}{n} > 0.$$

Equivalentemente $\text{dens}A > 0$ si y sólo si hay una constante C tal que para todo n , $\#\{k \leq n : k \in A\} > Cn$. Diremos que una función continua f es frecuentemente hipercíclica si hay un vector x tal que para cada conjunto abierto U el conjunto $N(x, U)$ tiene densidad inferior positiva. Los operadores frecuentemente hipercíclicos comparten propiedades comunes con los operadores caóticos. Los siguientes teoremas son bastante naturales y fueron probados por Grosse-Erdmann y Peris [57] y Shkarin [88]. Ver también Teorema 6.2.3 para una pequeña versión modificada del segundo resultado.

Teorema 1.2.22. *Sea X un espacio de Fréchet y T un operador frecuentemente hipercíclico. Entonces T es weakly mixing.*

Teorema 1.2.23. *Sea X un espacio de Banach y T un operador frecuentemente hipercíclico. Entonces su espectro no tiene puntos aislados. En particular, hay espacios de Banach reflexivos sin operadores frecuentemente hipercíclicos.*

Por otro lado, hay operadores frecuentemente hipercíclicos que no son caóticos [11] y operadores caóticos que no son frecuentemente hipercíclicos [75]. Recientemente, Menet construyó un operador inversible frecuentemente hipercíclico cuya inversa no es frecuentemente hipercíclica [76].

1.2.5. Familias de Furstenberg y \mathcal{F} -hiperciclicidad

Como una generalización de operadores hiperciclicidad frecuente podemos considerar operadores hipercíclicos cuyos conjuntos de recurrencia $N_T(x, U)$ sean grandes en un sentido combinatorio.

Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se dice una *Familia de Furstenberg* si $A \subseteq B$ y $A \in \mathcal{F}$, entonces $B \in \mathcal{F}$. Dada una familia de Furstenberg \mathcal{F} , diremos que T es \mathcal{F} -hypercyclic, siempre que exista un $x \in X$ tal que para todo conjunto abierto U , $N_T(x, U) := \{n : T^n(x) \in U\} \in \mathcal{F}$. Tal x se llama un vector \mathcal{F} -hipercíclico.

En esta tesis consideraremos varias nociones de \mathcal{F} -hiperciclicidad:

1. Decimos que A tiene densidad inferior positiva (o $A \in \underline{\mathcal{D}}$) si $\text{dens}(A) := \liminf_n \frac{\#\{k \leq n : k \in A\}}{n} > 0$ y decimos que un operador es frecuentemente hipercíclico si T es $\underline{\mathcal{D}}$ -hipercíclico.
2. Decimos que A tiene densidad superior positiva (o $A \in \mathcal{F}_{ud}$) si $\limsup_n \frac{\#\{k \leq n : k \in A\}}{n} > 0$ y decimos que un operador es \mathcal{U} -frecuentemente hipercíclico si T es \mathcal{F}_{ud} -hipercíclico.
3. Decimos que A tiene densidad de Banach positiva (o $A \in \mathcal{F}_{bd}$) si $\lim_n \limsup_k \frac{\#A \cap [k, k+n]}{n} > 0$ y decimos que un operador es reiterativamente hipercíclico si T es \mathcal{F}_{bd} -hipercíclico.

Recordemos que una progresión aritmética de longitud $m + 1$ ($m \in \mathbb{N}$), con diferencia común $k \in \mathbb{N}$ y término inicial $a \in \mathbb{N}$ es un subconjunto de \mathbb{N} de la forma $\{a, a + k, a + 2k, \dots, a + mk\}$.

- (4) Denotaremos a la familia formada por los números naturales que contienen *progresiones aritméticas arbitrariamente largas* como \mathcal{AP} .

- (5) Denotaremos a la familia de números naturales que contienen *progresiones aritméticas arbitrariamente largas de una diferencia común fija* k , para algún $k \in \mathbb{N}$ como \mathcal{AP}_* .

Decimos que una familia de Furstenberg es *upper* siempre que $\emptyset \notin \mathcal{F}$ y \mathcal{F} se pueda escribir como

$$\bigcup_{\delta \in D} \mathcal{F}_\delta, \quad \text{con } \mathcal{F}_\delta = \bigcap_{m \in M} \mathcal{F}_{\delta, m},$$

donde M es numerable y tal que las familias $\mathcal{F}_{\delta, m}$ y \mathcal{F}_δ cumplan

- cada $\mathcal{F}_{\delta, m}$ cumple que si $A \in \mathcal{F}_{\delta, m}$ y hay un conjunto finito F tal que $F \cap A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}_{\delta, m}$;
- \mathcal{F}_δ es *uniformemente invariante*, es decir, si $A \in \mathcal{F}$ entonces existe un δ tal que para todo n , $A - n \in \mathcal{F}_\delta$.

Ejemplo 1.2.24. Las familias $\mathcal{F}_{\neq \emptyset}$, \mathcal{F}_{ud} , \mathcal{F}_{bd} son upper mientras que $\underline{\mathcal{D}}$ no (ver [33]).

La familia \mathcal{AP} resulta upper: tomar $\mathcal{A}_\delta = \mathcal{AP}$ y \mathcal{F}_m la familia de subconjuntos con progresiones aritméticas de longitud superior a m .

La familia \mathcal{AP}_* también es upper: en este caso tomamos $(\mathcal{AP}_*)_n$ la familia de subconjuntos que tienen progresiones aritméticas arbitrariamente largas con paso fijo n y $(\mathcal{AP}_*)_n$ la intersección de las familias $(\mathcal{AP}_*)_{n, m}$ de subconjuntos que tienen progresiones aritméticas de paso fijo n con longitud m .

Bonilla y Grosse Erdmann demostraron un teorema de transitividad para las familias upper.

Teorema 1.2.25 (Bonilla-Grosse Erdmann [33]). *Supongamos que \mathcal{F} es una familia upper y T es un operador lineal en un espacio separable de Fréchet. Entonces los siguientes son equivalentes:*

1. *Para todo conjunto abierto V existe δ tal que para todo conjunto abierto U existe $x \in U$ con $N_T(x, U) \in \mathcal{F}_\delta$.*
2. *Para todo conjunto abierto V existe δ tal que para todo U y m hay un $x \in U$ con $N_T(x, U) \in \mathcal{F}_{\delta, m}$.*
3. *El conjunto de puntos \mathcal{F} -hipercíclicos es residual.*
4. *T es \mathcal{F} -hipercíclico.*

Superciclicidad

En 1972, Hilden y Wallen [62], que trabajaban en clases de operadores cíclicos, introdujeron la noción de operadores supercíclicos.

Definición 1.2.26. *Diremos que un operador es supercíclico siempre que exista un vector x tal que $\mathbb{C} \cdot \text{Orb}_T(x)$ sea denso en X .*

Todo operador hipercíclico es supercíclico y hay operadores supercíclicos que no son hipercíclicos, por ejemplo, el operador coshift en ℓ_p . En el mismo artículo, Hilden y Wallen notaron que, en el caso complejo, el fenómeno de superciclicidad solo puede ocurrir en el caso de dimensión infinita o en dimensión 1. Veinte años después, Hezog [61] generalizo el resultado al caso real.

Teorema 1.2.27. *Sea X espacio real y separable de Fréchet. Entonces X admite un operador supercíclico si y solo si X es de dimensión infinita o $\dim(X) \leq 2$.*

Proposición 1.2.28. *Supongamos que (X, f) , (Y, g) son sistemas dinámicos de modo que g se n cuasiconjuga a f . Si f es supercíclico, entonces g es supercíclico.*

Recientemente Charpentier, Ernst y Menet generalizaron la noción de superciclicidad a subconjuntos arbitrarios de los números complejos [39]. Dado un subconjunto $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$, definieron la noción de Γ -superciclicidad.

Definición 1.2.29. *Sea $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ y T operadores lineales en un espacio Fréchet. Diremos que un operador es Γ -supercíclico, siempre que haya un vector $x \in X$ tal que $\Gamma \cdot \text{Orb}_T(x)$ sea denso en X .*

Por lo tanto, superciclicidad se lee como \mathbb{C} -superciclicidad e hiperciclicidad como $\{*\}$ -superciclicidad.

El Teorema de León-Müller 1.2.21 se puede leer en un sentido de superciclicidad Γ . Establece que un operador lineal en un espacio Fréchet es \mathbb{T} -hipercíclico si y sólo si es hipercíclico.

En su trabajo, los autores estudiaron los subconjuntos $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ para los cuales Γ -superciclicidad y implica hiperciclicidad para todo operador lineal T . Los siguientes teoremas se probaron en [39]. Como en el Teorema de León-Müller, la prueba se basa en teoremas elementales de topología algebraica.

Teorema 1.2.30. *Sea X un espacio de Fréchet.*

1. $\Gamma \cdot \text{Orb}_T(x)$ denso implica $\text{Orb}_T(x)$ denso para todo operador lineal T si y sólo si Γ no es vacío, es acotado y alejado del cero;
2. $\Gamma \cdot \text{Orb}_T(x)$ en algún lugar denso implica $\text{Orb}_T(x)$ denso en X si y sólo si Γ no es vacío, acotado, alejado del cero y $\overline{\Gamma\mathbb{T}}$ tiene interior vacío.

δ -hiperciclicidad

En [48] Feldman introdujo la noción de órbita δ -densa para operadores lineales en espacios de Banach.

Definición 1.2.31. *Sea X un espacio de Banach y f una aplicación continua. Diremos que una órbita $\text{Orb}_f(x)$ es δ -densa siempre que haya un número positivo δ para el cual cada vector y satisface que $\|y - \text{Orb}_T(x)\| < \delta$.*

Definición 1.2.32. *Diremos que una función es δ -hipercíclica siempre que exista una órbita δ -densa .*

Si la función es un operador lineal, Feldman demostró que δ -hiperciclicidad es equivalente a hiperciclicidad.

Proposición 1.2.33. *Sea X un espacio de Banach y T un operador lineal. Si T es δ -hipercíclico, entonces es hipercíclico.*

A pesar del hecho de que cada operador hipercíclico δ es hipercíclico, no se sigue que cada órbita δ -densa sea densa en todas partes. El siguiente teorema debido a Feldman busca condiciones para garantizar esta propiedad.

Teorema 1.2.34. *Supongamos que T es un operador lineal en un espacio de Banach y supongamos que hay un conjunto δ -denso D , un vector $u \in X$, un número $d > 0$ y una aplicación $S : D \rightarrow D$ de modo que las siguientes propiedades son verdaderas:*

- I) $\|T^n(x) - u\| \geq d$ y $\|S^n(x) - u\| \geq d$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in D$;
- II) $T^n(x) \rightarrow 0$ y $S^n(x) \rightarrow 0$ para todo $x \in D$ y
- III) $TS = Id$ en D .

Luego, para todo $\varepsilon > 0$ existe x_ε de modo que $Orb_T(x_\varepsilon)$ es ε -densa pero no es densa en todo el espacio.

Caos en el sentido de Li-Yorke, caos distribucional y vectores irregulares.

La noción de vector irregular fue considerada por primera vez por Beauzamy en [15]. Recordemos que si $A \subseteq \mathbb{N}$, las densidades inferior y superior se definen como

$$\underline{dens}(A) := \liminf_n \frac{\#\{j \leq n : j \in A\}}{n} \text{ y } \overline{dens}(A) := \limsup_n \frac{\#\{j \leq n : j \in A\}}{n}.$$

Definición 1.2.35. *Decimos que un vector x es irregular para T si*

$$\limsup_n \|T^n(x)\| = \infty \text{ y } \liminf_n \|T^n(x)\| = 0.$$

Más en general, decimos que un vector x es distribucionalmente irregular si existe una sucesión de números naturales $A = (n_k)_k$ y $B = (m_k)_k$ de modo que $\overline{dens}(A) = \overline{dens}(B) = 1$ y tal que $\lim_k \|T^{n_k}(x)\| = 0$ y $\lim_k \|T^{m_k}(x)\| = \infty$.

Los vectores irregulares están relacionados con la noción de caos en el sentido de Li-Yorke.

Definición 1.2.36. *Sea X un espacio métrico. Decimos que una aplicación $f : X \rightarrow X$ es caótica en el sentido de Li-Yorke, siempre que exista un conjunto no numerable $\Gamma \subseteq X$ tal que para cada par de vectores x, y en Γ tenemos que*

$$\limsup_n d(f^n(x), f^n(y)) = \infty \text{ and } \liminf_n d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

En este caso, decimos que Γ es un conjunto scramble y x, y un par de Li-Yorke.

La existencia de un vector irregular para un operador lineal garantiza que el operador sea Li-Yorke caótico [16].

Teorema 1.2.37 (Bermudez, Bonilla, Martínez-Giménez y Peris). *Sean X un espacio de Banach y $T : X \rightarrow X$ un operador lineal. Los siguientes son equivalentes:*

- I) T admite un vector irregular;
- II) T admite un par Li-Yorke y
- III) T es Li-Yorke caótico.

De manera similar, los vectores distribucionales están relacionados con caos distribucional.

Definición 1.2.38. *Sea X un espacio métrico. Decimos que una aplicación f es distribucionalmente caótico siempre que exista un conjunto no numerable Γ contenido en X y $\varepsilon > 0$ de modo que para todo $\tau > 0$ y todo x, y en Γ ,*

$$\overline{\text{dens}}(\{j : d(f^j(x), f^j(y)) < \tau\}) = 1 \text{ y } \underline{\text{dens}}(\{j : d(f^j(x), f^j(y)) < \varepsilon\}) = 0.$$

Teorema 1.2.39. *Sea X un espacio de Banach. Si T admite un vector distribucionalmente irregular, entonces T es distribucionalmente caótico. Recíprocamente si T es distribucionalmente caótico y los vectores tales que $T^n(x) \rightarrow 0$ son densos en X , entonces T admite un vector distribucionalmente irregular.*

Finalizamos la sección con un resultado de existencia.

Definición 1.2.40. *Decimos que un subespacio cerrado $Y \subseteq X$ es (distribucional) irregular si todo vector distinto de cero de Y es (distribucional) irregular.*

Ciertamente, una subespacio (distribucional) irregular es un conjunto (distribucional) scramble.

Teorema 1.2.41. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita y separable. Entonces X admite un operador hipercíclico y distributivamente caótico que admite un subespacio distribucional.*

1.3. Sistemas dinámicos polinomiales en espacios de dimensión infinita

Como una extensión natural de la teoría lineal, uno puede estudiar órbitas de operadores homogéneos (no lineales) o polinomios. El primer resultado en esta dirección se debió a Bernardes [21], donde demostró que ningún polinomio homogéneo (no lineal) en un espacio de Banach puede ser hipercíclico. De su resultado, se puede deducir que asociado a cada polinomio homogéneo hay una bola (en adelante *la bola límite*) que es invariable bajo la acción del polinomio. Además,

cualquier órbita que entre en la bola límite converge a 0. Quizás este resultado fue una de las razones por las cuales la teoría de la dinámica polinómica homogénea ha tenido un desarrollo mucho menor que la contraparte lineal. Sin embargo, el comportamiento de las órbitas inducidas por un polinomio homogéneo puede ser altamente no trivial y está lejos de ser entendido.

Definición 1.3.1. *Sea X un espacio de Fréchet. Diremos que $P : X \rightarrow X$ es un polinomio homogéneo m siempre que haya un operador A -multilineal A tal que $P(x) = A(\overbrace{x, x, \dots, x}^m)$. En términos más generales, diremos que P es un polinomio (no necesariamente homogéneo) si P es una suma finita de polinomios homogéneos.*

Denotaremos $\mathcal{P}(^m X)$ al espacio de polinomios m -homogéneos. Además los polinomios m -homogéneos son aplicaciones homogéneas m , es decir, $P(tx) = t^m P(x)$. Si el espacio es Banach, entonces el espacio $\mathcal{P}(^m X)$ se convierte naturalmente en un espacio de Banach bajo la norma $\|P\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\|$.

Una de las dificultades que surgen al calcular la órbita de un polinomio m -homogéneo es que las iteraciones de un polinomio m -homogéneo ya no son m -homogéneas sino m^n homogéneas. Esto se sigue fácilmente por inducción ya que

$$P^n(tx) = P(P^{n-1}(tx)) = P(t^{m^{n-1}} P^{n-1}(x)) = (t^{m^{n-1}})^m P^n(x) = t^{m^{n-1} \cdot m} P^n(x) = t^{m^n} P^n(x).$$

1.3.1. Órbitas de polinomios homogéneos en espacios normados

Bernardes descubrió la primera obstrucción en la búsqueda de polinomios homogéneos hipercíclicos en [21], donde demostró que ningún espacio normado puede admitir un polinomio homogéneo hipercíclico (no lineal). Proporcionamos una versión ligeramente modificada de su resultado (ver también cite [Lemma 1.2] Ued94 para un resultado finito dimensional relacionado).

Proposición 1.3.2. *Supongamos que X es un espacio normado y P un polinomio homogéneo no lineal y que $r_P = \frac{1}{\|P\|^{\frac{1}{1-m}}}$. Entonces $P(r_P \overline{B}_X) \subseteq \overline{B}_{r_P}$. Además, $P^n(x) \rightarrow 0$ para todo $x \in r_P B_X$.*

Demostración. Sea $x \in r_P \overline{B}_X$. Es suficiente mostrar que $\|P(x)\| \leq r_P$. De hecho,

$$\|P(x)\| \leq \|P\| \|x\|^m \leq \|P\| \|P\|^{\frac{m}{1-m}} = \|P\|^{\frac{1}{1-m}} = r_P.$$

Ahora si $x \in r_P B_X$, entonces explotando la m^n homogeneidad de P^n obtenemos que,

$$\|P^n(x)\| = \left\| P^n \left(\frac{r_P}{\|x\|} \frac{\|x\|}{r_P} x \right) \right\| \leq \left(\frac{\|x\|}{r_P} \right)^{m^n} \left\| P \left(r_P \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \left(\frac{\|x\|}{r_P} \right)^{m^n} r_P \rightarrow 0.$$

□

Definición 1.3.3. *Dado un espacio de Banach X y un polinomio homogéneo P , diremos que r_P es el radio límite de P y que $r_P B_X$ es la bola límite de P .*

Corolario 1.3.4. *Ningún polinomio homogéneo de grado ≥ 2 definido en un espacio normado puede ser hipercíclico.*

A pesar de este hecho restrictivo, Bernardes mostró la existencia de órbitas que oscilan entre la bola límite y el infinito. También demostró que cada espacio de Banach infinito dimensional y separable admite un polinomio homogéneo supercíclico.

Proposición 1.3.5 (Bernardes). *Para cada m existe un polinomio homogéneo $P \in \mathcal{P}(^m \ell_2)$ y un vector $y \in \ell_2$ tal que*

$$\limsup_n \|P^n(y)\| = +\infty \quad \text{and} \quad \liminf_n \|P^n(y)\| = r_P.$$

Teorema 1.3.6 (Bernardes). *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita y separable. Entonces, para cualquier $m > 0$ X admite un polinomio supercíclico homogéneo m .*

Más recientemente, Peris, Kim y Song [64, 65] demostraron que todo espacio de Banach separable y de dimensión mayor que uno admite polinomios homogéneos *numéricamente hipercíclicos*. Kim, Peris y Song introdujeron recientemente la noción de hiperciclicidad numérica en [64] para operadores lineales. Una aplicación $F : X \rightarrow X$ se llama numéricamente hipercíclica siempre que haya vectores $x \in S_X$ y $x^* \in S_{X^*}$ de modo que $x^*(x) = 1$ y tal que la órbita numérica $\text{Norb}_F(x, x^*) := \{x^* F^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ es densa en \mathbb{C} .

1.3.2. Polinomios homogéneos hipercíclicos en espacios de Fréchet

Si el espacio es de Fréchet no normable entonces el espacio puede soportar polinomios homogéneos hipercíclicos. El primero en buscar este fenómeno fue Peris en [77]. Naturalmente, el espacio donde lo buscaba era $H(\mathbb{C})$. El polinomio que pensó que era hipercíclico era

$$P : \sum_{j \geq 0} a_j \frac{z^j}{j!} \rightarrow \sum_{j \geq 0} a_{j+1}^m \frac{z^j}{j!}. \quad (1.2)$$

Desafortunadamente hubo un error en su prueba y el polinomio no fue continuo. Luego buscó en el espacio $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, el espacio de sucesiones dotado con la topología de la convergencia puntual, donde logró encontrar un polinomio hipercíclico homogéneo [78].

Teorema 1.3.7 (Peris). *Sea $X = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Entonces el polinomio homogéneo*

$$P : x_n \rightarrow x_{n+1}^m \quad (1.3)$$

es caótico.

Después de este resultado aparecieron otros ejemplos positivos. En [73] Martínez- Giménez y Peris estudiaron los espacios de Köthe donde el operador coshift a la potencia m -ésima es hipercíclico. Notar que los polinomios definidos en (1.2) y (1.3) son casos particulares de este tipo de polinomios.

Definición 1.3.8. *Una matriz infinita $a_{j,k}$ se llama matriz de Köthe si para todo j, k , $0 \leq a_{j,k} \leq a_{j,k+1}$ y para todo j existe k para el cual $a_{j,k} > 0$. Dada una matriz de Köthe A definimos $\ell_p(A)$ y $c_0(A)$ como los espacios de Fréchet $\ell_p(A) := \{(x_j)_j : \text{para cada } k \ x_j \cdot a_{j,k} \in \ell_p\}$ con las seminormas dadas por $\rho_k(x) = \|x_j \cdot a_{j,k}\|_p$. De forma análoga, definimos $c_0(A)$.*

Ejemplos de espacios de Köthe son $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $H(\mathbb{C})$ y $H(\mathbb{D})$.

Teorema 1.3.9 (Martinez-Giménez y Peris). *Sea $(a_{j,k})_{j,k}$ matriz de Köthe $P \in \mathcal{P}^m(\ell_P(A))$ el polinomio dado por $P(x_n) = x_{n+1}^m$.*

1) *Entonces P es continuo si y solo si*

$$\forall k \exists n > k \text{ tal que } \sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{a_{j,k}}{a_{j,n}^m} < \infty.$$

ii) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) *P tiene un punto periódico distinto de cero;*

2) *para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $(a_{j,k})_j \in \ell_p$;*

3) *$\ell_\infty \subseteq \ell_p(A)$ canónicamente y*

4) *P es caótico.*

Este teorema proporciona una amplia clase de ejemplos de espacios no normables que admiten un polinomio homogéneo hipercíclico. Al considerar A una matriz tal que por cada k exista $j(k)$ tal que $a_{j,k} = 0$ para todo $j > k$ recuperamos el Ejemplo 1.2 en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y considerando $a_{j,k} = e^{-jk}$ tenemos que $H(\mathbb{D})$ admite un polinomio homogéneo hipercíclico.

Aron y Miralles dieron otro ejemplo positivo de un polinomio homogéneo hipercíclico [6] en los espacios $C^k(\mathbb{R})$.

Teorema 1.3.10 (Aron-Miralles). *Sea $X = C_{\mathbb{C}}^k(zR)$, el espacio de k -funciones diferenciables en la recta real. Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$, el polinomio $P(f)(z) = f(z+1)^m$ es caótico.*

Este teorema parece proporcionar un candidato natural para que un polinomio homogéneo sea caótico en el espacio de funciones complejas $H(\mathbb{C})$. Sin embargo, como veremos en el capítulo 3, la rigidez de las funciones holomorfas impone varias restricciones y evita la hiperciclicidad de τ_1^m en $H(\mathbb{C})$.

1.3.3. Polinomios hipercíclicos

Si el polinomio no es homogéneo, un espacio de Banach puede admitir polinomios hipercíclicos. Esto fue observado por primera vez por Peris [79] donde demostró primero que el polinomio $P(x) = ((x_2 + 1)^2 - 1, (x_3 + 1)^2 - 1, \dots)$ es caótico en ℓ_p y luego estudió los polinomios $P(x) = (p(x_2), p(x_3), p(x_4), \dots)$, donde $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio fijo tal que $p(0) = 0$. Encontró una sorprendente conexión entre el conjunto de Julia de p y la dinámica inducida por P .

Dada una función compleja $f \in H(\mathbb{C})$, entonces el conjunto Fatou de F es el conjunto

$$F_f := \{z : \text{la familia } \{f^n : n \in \mathbb{N}\} \text{ es normal en un entorno de } z\}.$$

El conjunto de Julia de f es el conjunto $J_f := \mathbb{C} \setminus F_f$. Un punto k -periódico z se llama *repelente* siempre que $|f^{(k)}(z)| > 1$. Los siguientes teoremas aclaran la conexión entre los conjuntos de Julia y los puntos repelentes y la importancia de J_f .

Teorema 1.3.11. *Sea $f \in H(\mathbb{C})$. Entonces $J_f = \overline{\{z : z \text{ es un punto fijo repelente de } f\}}$ y $f : J_f \rightarrow J_f$ es transitivo.*

Teorema 1.3.12. *Sean $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio tal que $p(0) = 0$ y $P \in \mathcal{P}(\ell_p)$ dado por $P(x) = (p(x_2), p(x_3), \dots)$. Entonces,*

- I) *P es caótico en el sentido de Auslander y Yorke si y solo si 0 pertenece al conjunto de Julia de p y*
- II) *si 0 es un punto fijo repelente de P , entonces P es (Devaney) caótico.*

Después de este resultado, Martínez-Giménez y Peris estudiaron los espacios de Köthe para los cuales el polinomio $P(x) = ((x_2 + 1)^m - 1, (x_3 + 1)^m - 1, \dots)$ es hipercíclico y caótico [73] y luego demostraron que todo espacio complejo de Banach separable e infinito dimensional admite un polinomio hipercíclico [72]. Más recientemente, Bernardes y Peris estudiaron polinomios que tienen un componente muy lineal [22]. Esto les permitió exhibir polinomios frecuentemente hipercíclicos y polinomios distribucionalmente caóticos.

Teorema 1.3.13. *Sea X un espacio infinito dimensional (complejo o real) de modo que admita un operador lineal T que satisfaga una de las siguientes propiedades: es hipercíclico, es caótico, es frecuentemente hipercíclico, es distributivamente caótico. Entonces X admite un polinomio P (dependiendo de T) que satisface la misma propiedad. En particular, todo espacio de Fréchet de dimensión infinita y separable admite un polinomio hipercíclico.*

Capítulo 2

Órbitas de polinomios homogéneos en espacios de Banach

En este capítulo estudiaremos órbitas de polinomios homogéneos (no lineales) en espacios de Banach. Ninguna órbita inducida por un polinomio homogéneo en un espacio de Banach puede ser densa, debido a que cualquier órbita que interseca a la bola límite tiende a cero. Sin embargo el comportamiento de las órbitas contenidas en el complemento de la bola límite puede ser no trivial. Evidencias de este hecho son los resultados de Bernardes [21], que probó la existencia de órbitas que oscilan entre la bola límite e infinito y la existencia de polinomios homogéneos supercíclicos. Más recientemente Kim, Peris y Song [64, 65] probaron que todo espacio de Banach separable y de dimensión más grande que 2 admite un polinomio homogéneo numericamente hipercíclico.

Es natural entonces preguntarse que tan grandes y complicadas pueden ser las órbitas que nunca intersecan a la bola límite. Por ejemplo, podemos plantear la existencia de órbitas que impliquen alguna propiedad débil de hiperciclicidad. En particular, podemos formular las siguientes preguntas:

- (I) El Teorema de Bourdon-Feldman (Teorema 1.2.20) establece que una órbita inducida por un operador lineal que es en algún lugar densa es en realidad densa ¿Existen polinomios homogéneos con órbitas en algún lugar densas?
- (II) Feldman mostró que si un operador lineal es δ -hipercíclico para algún $\delta > 0$ (i.e. un operador con una órbita que interseca a cualquier bola de radio δ) entonces es hipercíclico (Teorema 1.2.33) ¿ Existen polinomios homogéneos δ -hipercíclicos en espacios de Banach?
- (III) ¿Hay polinomios homogéneos débil hipercíclicos?
- (IV) Recientemente, Charpentier, Ernst y Menet [39] caracterizaron los conjuntos $\Gamma \subset \mathbb{C}$ para los cuales todo operador Γ -supercíclico (i.e. operadores T tal que $\Gamma \cdot Orb_T(x)$ es denso para algún x) es hipercíclico ¿Para que conjuntos $\Gamma \subset \mathbb{C}$ existen polinomios homogéneos Γ -supercíclicos?

Para estudiar estas preguntas proponemos una noción de conjunto de Julia asociada a polinomios homogéneos en espacios de Banach. De sus propiedades elementales deducimos que toda órbita inducida por un polinomio homogéneo es nunca densa. Deducimos entonces que la respuesta a (I) es negativa. Luego, un estudio cuidadoso del conjunto de Julia de un polinomio homogéneo muy simple como en ℓ_p , que es el producto entre el coshift y un funcional, nos permite probar que el polinomio es δ -hipercíclico, débil hipercíclico y Γ -supercíclico para cualquier conjunto Γ que es no acotado o tal que 0 no es punto de acumulación de Γ . Más aún estas propiedades son realizadas por la misma órbita. Finalmente, probamos también que tal polinomio existe en cualquier espacio de Banach separable y de dimensión infinita.

Los contenidos de este capítulo están basados en el trabajo [37].

2.1. Conjuntos de Julia para polinomios homogéneos en espacios de Banach

Una propiedad distintiva de la dinámica inducida por una función holomorfa en el plano complejo es que podemos separar al dominio en dos conjuntos completamente invariantes: El conjunto de Julia, que es cerrado, no vacío, perfecto, con comportamiento caótico (y luego donde la dinámica interesante ocurre) y el conjunto de Fatou, que es abierto con comportamiento regular. A lo largo de los años aparecieron muchas generalizaciones a varias variables y no hay un consenso uniforme de la correcta definición de conjunto de Julia en este contexto.

Recordemos que si P es un polinomio homogéneo en un espacio de Banach X , entonces llamamos $r_P = \|P\|^{\frac{1}{1-m}}$ al *radio límite* y $r_P B_X$ es la *bola límite*. Si una órbita interseca a la bola límite, entonces nunca se va de ella y se ve forzada a tender a cero. Esto nos permite separar naturalmente al sistema dinámico en dos sistemas diferentes. Por un lado tenemos $A_P := \bigcup_{n \geq 0} P^{-n}(r_P B_X) = \{x \in X : P^n(x) \rightarrow 0\}$. Este conjunto es claramente abierto, P -invariante y es por definición la base de atracción del 0. Por otro lado tenemos su complemento, $A_P^c = \{x : \|P^n(x)\| \geq r_P \forall n \geq 0\}$. Este conjunto es cerrado y es también P -invariante. Proponemos la siguiente definición.

Definición 2.1.1. El *conjunto de Julia* asociado a un polinomio homogéneo P en un espacio normado es el conjunto $J_P := \partial A_P$.

Como muestra el siguiente resultado, cualquier órbita con dinámica interesante yace en el conjunto de Julia.

Proposición 2.1.2. Sea P un polinomio m -homogéneo en un espacio normado. Si $x \notin J_P$ entonces ó bien $\lim P^n(x) = \infty$ ó $\lim P^n(x) = 0$.

Demostración. Sea $x \notin J_P$ y supongamos que $P^n(x) \rightarrow 0$. Entonces $x \notin \overline{A_P}$ y en consecuencia hay un $0 < t < 1$ con $tx \notin A_P$. Esto implica por la Proposición 1.3.2 que, para cualquier n , $\|P^n(tx)\| \geq r_P$. Concluimos que $\|P^n(x)\| = \frac{1}{t^{m^n}} \|P^n(tx)\| \geq \frac{1}{t^{m^n}} r_P \rightarrow \infty$. \square

Notemos que, en particular, los vectores periódicos y órbitas con puntos de acumulación tienen que pertenecer a J_P .

En el contexto de operadores lineales, un vector irregular es un vector que satisface $\liminf_n \|T^n(x)\| = 0$ mientras $\limsup_n \|T^n(x)\| = \infty$, ver [15, 16, 20]. Estas condiciones son incompatibles para polinomios homogéneos no lineales en espacios de Banach. En vista de la Proposición 1.3.2, resulta natural proponer la siguiente definición de vector irregular para polinomios homogéneos. Notemos que cualquier vector irregular debe pertenecer a J_P .

Definición 2.1.3. Decimos que un vector es irregular para un polinomio homogéneo P si $\liminf_n \|P^n(x)\| = r_P$ y $\limsup_n \|P^n(x)\| = \infty$.

Podemos considerar también la base de atracción del infinito. Definimos R_P como el conjunto abierto maximal tal que cualquier órbita tiende en norma a ∞ , esto es, $R_P = \{x \in X : \text{existe } r >$

0 tal que $\|P^n(y)\| \rightarrow \infty$ para cualquier $y \in B_r(x)$. Por definición R_P es abierto y contenido en $\overline{A_P}^c$.

Proposición 2.1.4. *Sea P un polinomio m -homogéneo en un espacio normado X . Entonces, X es la unión disjunta de A_P , J_P y R_P .*

Demostración. Es suficiente probar que $(A_P^c)^\circ = R_P$. Como R_P es abierto y $R_P \cap A_P = \emptyset$ tenemos que $R_P \subseteq (A_P^c)^\circ$. Recíprocamente, si $x \in (A_P^c)^\circ$, existe un $\epsilon > 0$ con $B_\epsilon(x) \cap \overline{A_P} = \emptyset$. Sea $y \in B_\epsilon(x)$, por la proposición anterior ó bien $P^n(y) \rightarrow 0$ ó $\|P^n(y)\| \rightarrow \infty$. Como $y \notin A_P$, $P^n(y) \rightarrow \infty$. Luego $x \in R_P$. \square

El sistema dinámico inducido por un operador lineal T y λT pueden llegar a ser completamente diferentes. En efecto, si $\|\lambda T\| < 1$ entonces cualquier órbita tiende a 0 mientras que T puede admitir órbitas densas. Éste no es el caso para polinomios homogéneos. El mismo fenómeno ocurre para operadores bilineales (ver [56]).

Proposición 2.1.5. *Sea P un polinomio m -homogéneo, $m > 1$. Entonces para cualquier $\lambda \neq 0$, λP es conjugado a P bajo un isomorfismo lineal.*

Demostración. Sea $\lambda^{\frac{1}{m-1}}$ cualquier $\frac{1}{m-1}$ -raíz de λ . El siguiente factor sirve, $\phi(x) = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{m-1}}}x$. En efecto,

$$\lambda P\left(\frac{x}{\lambda^{\frac{1}{m-1}}}\right) = \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{m}{m-1}}}P(x) = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{m-1}}}P(x).$$

\square

El conjunto de Julia es preservado por conjugación si el factor es un isomorfismo lineal.

Lema 2.1.6. *Sean Q y P polinomios homogéneos tal que Q es conjugado a P vía un isomorfismo lineal. Entonces $\phi(A_P) = A_Q$, $\phi(J_P) = J_Q$, $\phi(R_P) = R_Q$.*

Demostración. Como ϕ es un isomorfismo, es suficiente probar que $\phi(A_P) \subseteq A_Q$ y $\phi(R_P) \subseteq R_Q$. Sea $x \in A_P$, luego $\|Q^n(\phi(x))\| = \|\phi(P^n(x))\| \leq \|\phi\|\|P^n(x)\| \rightarrow 0$. Tenemos entonces que $\phi(x) \in A_Q$. Consideremos ahora $x_0 \in R_P$, y sea $\epsilon' > 0$ tal que $\|P^n(x)\| \rightarrow \infty$ para todo $x \in B_{\epsilon'}(x_0)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\phi^{-1}(B_\epsilon(\phi(x_0))) \subseteq B_{\epsilon'}(x_0)$. Luego para $y \in B_\epsilon(\phi(x_0))$, $\|Q^n(y)\| = \|Q^n(\phi(\phi^{-1}(y)))\| = \|\phi(P^n(\phi^{-1}(y)))\|$, y entonces $\|Q^n(y)\| \rightarrow \infty$ porque ϕ es un isomorfismo y $\phi^{-1}(y) \in B_{\epsilon'}(x_0)$. \square

Corolario 2.1.7. *Sea P un polinomio m -homogéneo, $m > 1$ y $\lambda \neq 0$. Entonces $J_{\lambda P} = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{m-1}}}J_P$.*

Lema 2.1.8. *Si $x \in A_P$ entonces $tx \in A_P$ para todo $|t| \leq 1$, si $x \in R_P$ entonces $tx \in R_P$ para todo $|t| \geq 1$.*

Demostración. Sea $x \in A_P$ y $|t| \leq 1$. Entonces $\|P^n(tx)\| \leq \|P^n(x)\| \rightarrow 0$. En consecuencia tenemos que $tx \in A_P$. Supongamos ahora que $x \in R_P$ y $|t| \geq 1$. Existe $\epsilon > 0$ tal que $\|P^n(y)\| \rightarrow \infty$ para todo $y \in B_\epsilon(x)$. Sea $y \in B_{\epsilon t}(tx)$, luego

$$\left\|\frac{y}{t} - x\right\| \leq \epsilon \text{ y } \|P^n(y)\| \geq \|P^n\left(\frac{y}{t}\right)\| \rightarrow \infty.$$

\square

El siguiente resultado muestra que el conjunto de Julia de un polinomio homogéneo comparte algunas de las propiedades del conjunto de Julia asociado a funciones holomorfas en el plano complejo.

Proposición 2.1.9 (Propiedades de J_P). *Sea P un polinomio homogéneo no lineal. El conjunto de Julia J_P satisface las siguientes propiedades:*

- i) *es cerrado con interior vacío;*
- ii) *es P -invariante;*
- iii) *es perfecto;*
- iv) $J_{P^n} = J_P$.

Demostración. i) Esto es claro ya que J_P es la frontera de un conjunto abierto.

ii) Notemos primero que $y \in A_P$ si y sólo si $P(y) \in A_P$. Luego, si $x \in J_P$ entonces $P(x)$ no pertenece a A_P . Por otro lado, existe $(a_n)_n \subseteq A_P$ tal que $a_n \rightarrow x$. Luego $P(a_n)$ pertenece también a A_P y $P(a_n) \rightarrow P(x)$. Tenemos entonces que $P(x) \in J_P$.

iii) Notemos que si $x \in J_P$ entonces $\lambda x \in J_P$ para todo $|\lambda| = 1$.

iv) Es suficiente mostrar que $A_{P^n} = A_P$. Claramente si $P^k(x) \rightarrow 0$ entonces $(P^n)^k(x) \rightarrow 0$ y luego $A_P \subseteq A_{P^n}$. La recíproca se sigue gracias a la existencia de la bola límite (Proposición 1.3.2). Si $P^{nk}(x) \rightarrow 0$ entonces $Orb_{P^n}(x)$ interseca a la bola límite de P y luego $P^n(x)$ tiende a cero. \square

En contraste con el caso unidimensional, el conjunto de Julia puede ser vacío. En efecto, si $P \in \mathcal{P}({}^2\ell_2; \ell_2)$ es definido como $P(x) = (x_2^2, x_3^2, x_4^2, \dots)$, entonces $P^n(x) \rightarrow 0$ para todo $x \in \ell_2$. Luego $A_P = \ell_2$ y $J_P = R_P = \emptyset$.

Proposición 2.1.10 (Bernardes). *Sea $P \in \mathcal{P}({}^2\ell_p)$, $P(x) = (x_2^2, x_3^2, \dots)$. Entonces $P^n(x) \rightarrow 0$ para cualquier $x \in \ell_p$.*

Demostración. Sea n_0 tal que $|x_n| < 1$ para todo $n \geq n_0$. Entonces para todo $n \geq n_0$ tenemos que $\|P^n(x)\| \leq \|(x_j)_{j \geq n+1}\|_p \rightarrow 0$. \square

Un conjunto A es *completamente invariante* via P si $P(A) \subseteq A$ y $P^{-1}(A) \subseteq A$. El conjunto de Julia de un polinomio homogéneo no tiene porque ser completamente invariante, como mostraremos en el Ejemplo 2.2.21. Por otro lado, bajo ciertas condiciones sobre P , J_P resulta completamente invariante.

Proposición 2.1.11. *Sea $P \in \mathcal{P}({}^m X; X)$. Si P es abierto o si $R_P = \emptyset$ entonces J_P es completamente invariante.*

Demostración. Sea $x \in X$ tal que $P(x) \in J_P$. Supongamos que $x \notin J_P$. Tenemos entonces que $x \in A_P$ o $x \in R_P$. Si $x \in A_P$, $P^n(x) \rightarrow 0$ y luego $P(x) \in A_P$. Si $R_P = \emptyset$ esto implica que $x \in J_P$.

Si $R_P \neq \emptyset$ y $x \in R_P$, hay un $\epsilon > 0$ tal que $\|P^n(y)\| \rightarrow \infty$ para todo $y \in B_\epsilon(x)$. Como P es abierto, $P(B_\epsilon(x))$ es un entorno abierto de $P(x)$ y $P^n(z) \rightarrow \infty$ para todo $z \in P(B_\epsilon(x))$ y luego $P(x) \in R_P$. \square

Como J_P tiene interior vacío, podemos deducir un corolario simple pero al mismo tiempo importante, que implica una respuesta negativa a la pregunta (I) planteada en la introducción.

Corolario 2.1.12. *Sea X un espacio normado, y $P \in \mathcal{P}(^m X; X)$, $m \geq 2$. Los siguientes conjuntos son nunca densos: toda órbita inducida por P , el conjunto formado por los vectores irregulares, el conjunto formado por los vectores periódicos.*

Demostración. Los vectores periódicos e irregulares están contenidos en el conjunto de Julia, que es nunca denso. Para que una órbita sea en algún lugar densa, no puede tender ni a infinito ni a cero. Luego tiene que pertenecer al conjunto de Julia, que tiene interior vacío. \square

Es natural preguntarse que tan grande puede ser el conjunto de Julia (o la clausura de una órbita). Sabemos que no contiene puntos interiores. En la siguiente subsección veremos algunos ejemplos de conjuntos de Julia, pero veamos primero que ningún múltiplo de la esfera límite puede estar contenido en el conjunto de Julia. Para ello necesitaremos el siguiente resultado.

Proposición 2.1.13. *Sea P un polinomio m -homogéneo y sea $z \in J_P$ tal que $tz \in J_P$ con $0 < |t| < 1$. Entonces $P^n(z) \rightarrow \infty$. En consecuencia si $x \in X$, $y \in \text{Orb}_P(x)$ y $0 < |t| < 1$, entonces ty no es un punto de acumulación de $\text{Orb}_P(x)$.*

Demostración. Si $tz \in J_P$ entonces $\|P^n(tz)\| \geq r_P$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\|P^n(z)\| = \frac{1}{|t|^{m^n}} \|P^n(tz)\| \geq \frac{r_P}{|t|^{m^n}} \rightarrow \infty.$$

Para la última afirmación, supongamos lo contrario. Se sigue que $y \in \text{Orb}_P(x) \subset J_P$. Como J_P es cerrado, $ty \in J_P$. Luego, $P^n(y) \rightarrow \infty$. Esto es una contradicción ya que ty es un punto de acumulación de $\text{Orb}_P(y)$. \square

Veremos en la próxima sección (Observación 2.2.18) que es posible que una órbita de un punto y se acumule en ty con $|t| \geq 1$ (Veremos de hecho un ejemplo que se acumula en todo tal múltiplo)

Corolario 2.1.14. *Sea P un polinomio m -homogéneo y sea $s \neq r_P = \|P\|^{-\frac{1}{m-1}}$. Entonces $sS_X \not\subset J_P$. En particular, sS_X no está contenido en la clausura de ninguna órbita de P .*

Demostración. Para $s < r_P$ el resultado es consecuencia de la Proposición 1.3.2. Supongamos que existe $s > r_P$ tal que $sS_X \subset J_P$. Por la Proposición 2.1.13, si $\|z\| > s$ entonces $P^n(z) \rightarrow \infty$. Luego $\{\|z\| > s\} \subset R_P$, y como J_P es invariante, $P(s\overline{B}_X) \subset s\overline{B}_X$.

Como $s^{m-1}\|P\| = \frac{s^{m-1}}{r_P^{m-1}} > 1$, existe un $x_0 \in S_X$ con $\|P\| < s^{m-1}\|P\|\|P(x_0)\|$. Luego,

$$\|P(sx_0)\| > \frac{s^m}{s^{m-1}\|P\|} \|P\| = s,$$

que es una contradicción. \square

En la última proposición fue importante que $s \neq r_P$, y no es cierta para $s = r_P$. En efecto, tenemos el siguiente ejemplo simple: sea $X = \ell_\infty^n = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$ y $P : X \rightarrow X$ el polinomio 2-homogéneo definido como $P(z_1, \dots, z_n) = (z_1^2, \dots, z_n^2)$. Como $\|P\| = 1$, la esfera límite es la esfera unitaria y es muy fácil mostrar que coincide con J_P . Si $n = 1$, el polinomio es $P(z) = z^2$ definido en \mathbb{C} . En este ejemplo trivial $J_P = \mathbb{T}$, y más aún $P|_{\mathbb{T}}$ es el "doubling map" en el toro, que es mixing y luego tiene órbitas densas. No sabemos si hay un ejemplo no trivial de un espacio de Banach complejo X y un polinomio homogéneo P en X teniendo una órbita densa en su esfera límite. Notar que tal polinomio tiene que satisfacer que $r_P S_X = J_P$ es completamente invariante (y luego para todo $x \in X$, $\|P(x)\| = \|P\|\|x\|^m$) y que $P|_{r_P S_X}$ es transitivo.

2.1.1. Ejemplos de conjuntos de Julia

En el siguiente ejemplo, el conjunto de Julia contiene un hiperespacio afín.

Ejemplo 2.1.15. Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Tomemos $\varphi \in X^*$ y x_0 tal que $\varphi(x_0) = 1$. Como $\text{Ker}(\varphi)$ es un espacio de Banach de dimensión infinita, por [2, 18] existe un operador hipercíclico $T : \text{Ker}(\varphi) \rightarrow \text{Ker}(\varphi)$. Definimos $P \in \mathcal{P}(^m X; X)$ como

$$P(x) = \varphi(x)^m x_0 + \varphi(x)^{m-1} T(x - \varphi(x)x_0).$$

Luego $J_P = \mathbb{T}x_0 \oplus \text{Ker}(\varphi)$ y $P|_{J_P}$ es transitivo.

Demostración. Comenzamos estudiando A_P y R_P . Sea $x = \lambda x_0 + y$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ y $y \in \text{Ker}(\varphi)$. Luego

$$P^n(x) = \lambda^{m^n} x_0 + \lambda^{m^n-1} T^n(y). \quad (2.1)$$

Si $|\lambda| < 1$ tenemos que $\|P^n(x)\| \leq |\lambda|^{m^n} \|x_0\| + |\lambda|^{m^n-1} \|T^n(y)\| \rightarrow 0$. Luego $A_P \subseteq \{x : |\varphi(x)| < 1\}$.

Consideremos ahora en X la siguiente norma equivalente $\|x\|_\infty := \max\{|\varphi(x)|\|x_0\|, \|x - \varphi(x)x_0\|\}$. Por el Lemma 2.1.6, R_P , A_P y J_P son invariantes vía normas equivalentes. El conjunto $\{x : |\varphi(x)| > 1\}$ es abierto y, por (2.1), si $|\varphi(x)| > 1$ entonces $\|P^n(x)\|_\infty \rightarrow \infty$. Concluimos que $\{x : |\varphi(x)| > 1\} \subseteq R_P$, y $\{x : \varphi(x) \in \mathbb{T}\} = \partial A_P = J_P$.

Finalmente veamos que $P|_{\mathbb{T}x_0 \oplus \text{Ker}(\varphi)}$ es transitivo. Recordemos que para cualquier conjunto abierto $W \subseteq \mathbb{T}$, existe un n_0 tal que $\mathbb{T} \subseteq W^{m^n}$ para todo $n \geq n_0$. Sean U y V conjuntos abiertos en $\mathbb{T}x_0 + \text{Ker}(\varphi)$. Considerando la norma $\|\cdot\|_\infty$ en X , podemos suponer que $U = (U_1, U_2)$, $V = (V_1, V_2)$ con $U_1, V_1 \subseteq \mathbb{T}x_0$, $U_2, V_2 \subseteq \text{Ker}(\varphi)$, siendo todos ellos conjuntos abiertos. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{T} \subseteq U_1^{m^n-1}$ para todo $n \geq n_0$. Debido a que T es transitivo, hay un $n_1 > n_0 \in \mathbb{N}$ con $V_2 \cap T^{n_1}(U_2) \neq \emptyset$.

Notemos que por (2.1),

$$P^{n_1}(U_1 \times U_2) = \{\lambda^{m^{n_1}} x_0 + \lambda^{m^{n_1}-1} T^{n_1}(y) : \lambda x_0 \in U_1, y \in U_2\} = \mathbb{T}x_0 \times \mathbb{T}T^{n_1}(U_2).$$

Luego, $P^{n_1}(U_1 \times U_2) \cap V_1 \times V_2 \neq \emptyset$. □

Bernardes probó en [21, Theorem 2] que si X es un espacio de Banach separable e infinito dimensional entonces X admite un polinomio homogéneo no lineal que es supercíclico.

Notemos que el hecho de que $P|_{\mathbb{T}x_0 \oplus \text{Ker}(\varphi)}$ sea transitivo implica en particular que P es supercíclico (además \mathbb{R}_+ -supercíclico, ver [17]). Más aún, usando [31], tal polinomio se puede construir en cualquier espacio de Fréchet separable de dimensión infinita. Luego hemos dado una prueba simple y una extensión de [21, Theorem 2].

Proposición 2.1.16. *Sean $m \geq 2$ y X un espacio de Fréchet separable e infinito dimensional. Entonces X admite un polinomio m -homogéneo que es \mathbb{R}_+ -supercíclico.*

Observación 2.1.17. El estudio de la dinámica de los polinomios homogéneos está estrechamente relacionado con el estudio de las iteraciones de aplicaciones holomorfas y meromorfas en espacios proyectivos. Cada aplicación meromorfa en \mathbb{P}^k admite un levantado en \mathbb{C}^{k+1} que es un polinomio homogéneo. Más aún, un polinomio homogéneo en \mathbb{C}^{k+1} es supercíclico si y sólo si su aplicación asociada en el espacio proyectivo tiene una órbita densa en \mathbb{P}^k . El primer ejemplo de tal aplicación fue construido por Lattes en \mathbb{P}^1 y esto puede también ser realizado en \mathbb{P}^k , ver [47]. Luego, conocemos también la existencia de polinomios homogéneos supercíclicos en espacios de dimensión finita.

Decimos que una aplicación $f : X \rightarrow X$ definida en un espacio métrico es *distribucionalmente caótica* si existe un conjunto no contable $\Gamma \subseteq X$ y $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\tau > 0$ y todos $x, y \in \Gamma$ tenemos que

$$\begin{aligned} \limsup_n \frac{1}{n} \#\{0 \leq i \leq n-1 : d(f^i(x), f^i(y)) < \tau\} &= 1 \\ \liminf_n \frac{1}{n} \#\{0 \leq i \leq n-1 : d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon\} &= 0. \end{aligned}$$

Si tal conjunto Γ es un subespacio cerrado, entonces decimos que Γ es un *subespacio distribucional irregular*. La noción de caos distribucional fue introducida por Schweizer y Smital en [86] para espacios métricos, pero tiene sentido considerarla para operadores lineales en espacios de Banach y de Fréchet. Fue de hecho considerada por varios autores, ver por ejemplo [16, 23, 20]. Los primeros en estudiar polinomios distribucionalmente caóticos fueron Bernardes y Peris en [22], donde probaron (entre otros resultados) que todo espacio de Banach, separable y de dimensión infinita, admite un polinomio (no-homogéneo) distribucionalmente caótico con un subespacio distribucional irregular denso. Como todo espacio de Banach, separable e infinito dimensional, admite un operador lineal con un subespacio distribucional irregular denso (ver [16, Theorem 35]), el Ejemplo 2.1.15 nos permite probar que todo espacio de Banach, separable y de dimensión infinita, admite un polinomio *homogéneo* que es distribucionalmente caótico.

Proposición 2.1.18. *Sea X un espacio de Banach separable y de dimensión infinita. Entonces X admite un polinomio homogéneo de grado arbitrario que es distribucionalmente caótico y que tiene un subespacio afín distribucional irregular que es denso en un hiperespacio afín.*

Bernardes en [21, Proposition 5] mostró un ejemplo de un polinomio homogéneo P con un vector irregular x_0 . En su ejemplo, $Orb_P(x_0)$ no tiene puntos de acumulación y más aún, la sucesión $(\|P^n(x_0)\|)_n$ es una sucesión no acotada de números positivos cuyo único punto de acumulación es r_P . A continuación, presentaremos un ejemplo de un polinomio homogéneo de norma 1 (y luego $r_P = 1$), con un vector irregular x tal que $\overline{Orb_P(x)}$ es un hiperespacio afín que interseca a la esfera límite, y luego $\overline{\{\|P^n(x)\| : n \in \mathbb{N}\}} = [r_P, \infty)$.

Ejemplo 2.1.19. Sea P el polinomio m -homogéneo definido en el Ejemplo 2.1.15. Tomemos $m = 2$, $X = \ell_1$, $x_0 = e_1$, $\varphi = e'_1$, y $T : Ker(\varphi) \equiv \ell_1(\mathbb{N}_{\geq 2}) \rightarrow \ell_1(\mathbb{N}_{\geq 2})$ el operador hipercíclico $(1 + \epsilon)B$, donde B es el coshift en $\ell_1(\mathbb{N}_{\geq 2})$ y $0 < \epsilon < 1$.

Entonces $\|P\| = 1$ y $J_P = \mathbb{T}e_1 + Ker(e'_1)$.

Como $P|_{J_P}$ es transitivo, existe una órbita cuya clausura contiene un hiperespacio afín que interseca a la clausura de la bola límite. En particular existe un vector irregular x tal que $\overline{\{\|P^n(x)\| : n \in \mathbb{N}\}}$ es $[1, \infty) = [r_P, \infty)$.

Demostración. Debemos probar solamente que $\|P\| = 1$, ya que las otras afirmaciones fueron probadas en el Ejemplo 2.1.15.

Sea $x \in S_{\ell_1}$ y supongamos que $x = \lambda e_1 + \gamma$, donde $\gamma \in Ker(e'_1)$ y $|\lambda| + \|\gamma\|_1 = 1$. Luego

$$\|P(x)\|_1 = |\lambda^2| + |\lambda| \|(1 + \epsilon)B((\gamma_n))\|_1 \leq |\lambda|^2 + (1 + \epsilon)|\lambda| \|((\gamma_n)_n)\|_1,$$

y $\lambda + \|(\gamma_n)_n\|_1 = 1$.

Tenemos entonces que $\|P\|$ es menor o igual al máximo de la función $f(s, t) = s^2 + (1 + \epsilon)st$ restringida a $s + t = 1$, $s \geq 0$ y $t \geq 0$. Como $0 < \epsilon < 1$, este máximo es 1.

Por otro lado, $P(e_1) = e_1$, y luego $\|P\| = 1$. □

Es posible también construir polinomios m -homogéneos análogos en $X = \ell_p$, $1 < p < \infty$, si $m > (1 + \epsilon)^p$.

En [78] fue mostrado que el polinomio definido como el coshift a la m potencia, actuando en el espacio (no normable) de Fréchet $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es caótico (ver también [73]). En ℓ_p ($p < \infty$) o c_0 la dinámica de este polinomio es trivial ya que toda órbita tiende a 0, i.e. A_P es todo el espacio y el conjunto de Julia es vacío. El siguiente ejemplo analiza este polinomio en el espacio de las sucesiones convergentes.

Ejemplo 2.1.20. Tomemos $X = c$ el espacio de sucesiones convergentes y consideremos el polinomio m -homogéneo definido como el coshift a la m potencia, esto es, $P(x)_j = x_{j+1}^m$. Entonces $A_P = \{(a_j)_j : |\lim_j a_j| < 1\}$, $J_P = \{(a_j)_j : |\lim_j a_j| = 1\}$, $R_P = \{(a_j)_j : |\lim_j a_j| > 1\}$ y $P|_{J_P}$ es transitivo.

Demostración. Observemos primero que $\|P\| = 1 = r_P$.

Sea $(a_n)_n \in c$ con $L = |\lim a_n| < 1$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \delta < 1$ para todo $n \geq n_0$. Entonces $\|P^n((a_n)_n)\|_{\infty} \leq \delta^{m^n} \rightarrow 0$. Esto implica que $\{(a_j)_j : |\lim_j a_j| < 1\} \subseteq A_P$. Similarmente $R_P \subseteq \{(a_j)_j : |\lim a_j| > 1\}$. Finalmente como $\{(a_j)_j : |\lim a_j| = 1\} \subseteq \partial A_P$ se sigue que $J_P = \{(a_j)_j : |\lim a_j| = 1\}$.

Probemos ahora que $P|_{J_P}$ es transitivo. Notemos que $A := \{a + e^{i\theta}\mathbf{1} : a \in c_{00}, \theta \in [0, 2\pi]\}$ es denso en J_P , donde $\mathbf{1}$ es el vector con coordenadas $[\mathbf{1}]_i = 1$ para todo i .

Sean U, V conjuntos abiertos y $v + e^{i\theta_2}\mathbf{1} \in V \cap A$. Sea $\epsilon > 0$ con $B_\epsilon(v + e^{i\theta_2}) \subseteq V$. Como la aplicación $\Phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, $\Phi(e^{i\theta}) = e^{mi\theta}$ induce un sistema dinámico mixing, existe un $u + e^{i\theta_1}\mathbf{1} \in U \cap A$ tal que la Φ -órbita de $e^{i\theta_1}$ es densa en \mathbb{T} . Supongamos que $u = \sum_{k=1}^N u_k e_k$ y $v = \sum_{k=1}^N v_k e_k$.

Para todo $0 \neq a \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ consideramos $a^{\frac{1}{n}}$ una $\frac{1}{n}$ -raíz de a de modo que $a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$, cuando $n \rightarrow \infty$. Existe entonces $n_0 > N$ tal que para todo $n \geq n_0$, el vector x_n pertenece a U , donde

$$x_n := \sum_{k=1}^N (u_k + e^{i\theta_1})e_k + \sum_{k=N+1}^n e^{i\theta_1}e_k + \sum_{k=n+1}^{N+n} (v_{k-n}e^{-i\theta_2} + 1)^{\frac{1}{m^n}} e^{i\theta_1}e_k + \sum_{k=N+n+1}^{\infty} e^{i\theta_1}e_k.$$

Luego

$$\begin{aligned} \|P^n(x_n) - v - e^{i\theta_2}\mathbf{1}\|_\infty &= \left\| \sum_{k=1}^N (v_k e^{-i\theta_2} + 1) e^{i\theta_1 m^n} e_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{i\theta_1 m^n} e_k - v - e^{i\theta_2}\mathbf{1} \right\|_\infty \\ &= \left\| \sum_{k=1}^N v_k (e^{-i\theta_2} \Phi^n(e^{i\theta_1}) - 1) e_k + \sum_{k=1}^{\infty} (\Phi^n(e^{i\theta_1}) - e^{i\theta_2}) e_k \right\|_\infty \\ &\leq (\|v\|_\infty + 1) |\Phi^n(e^{i\theta_1}) - e^{i\theta_2}|. \end{aligned}$$

Por la elección de θ_1 podemos tomar $n \geq n_0$ tal que $|\Phi^n(e^{i\theta_1}) - e^{i\theta_2}|$ es arbitrariamente chico, de modo que $P^n(x_n)$ pertenece a V . \square

2.2. Polinomios homogéneos δ -hipercíclicos, debil hipercíclicos y Γ -supercíclicos

Ningún polinomio homogéneo en un espacio de Banach puede ser hipercíclico. Es natural entonces preguntarse si pueden satisfacer una noción débil de hiperciclicidad. En esta sección mostraremos un ejemplo simple de un polinomio homogéneo que es al mismo tiempo δ -hipercíclico, débil hipercíclico y Γ -supercíclico para todo $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ que es no acotado o que 0 es punto de acumulación de Γ . Recordemos algunas definiciones básicas.

Sea X un espacio de Banach. Decimos que un conjunto $A \subseteq X$ es δ -denso para $\delta > 0$ si se cumple que para todo $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $\|x - a\| < \delta$. Decimos que una aplicación $P : X \rightarrow X$ es δ -hipercíclico si existe x tal que $Orb_P(x)$ es δ -denso en X . En este caso, diremos que x es un vector δ -hipercíclico para P .

Este fenómeno fue estudiado por N. Feldman en [48] en el contexto de operadores lineales en espacios de Banach. Allí probó que un operador lineal es hipercíclico si y sólo si es δ -hipercíclico.

Una aplicación $P : X \rightarrow X$ es *débil hipercíclica* si existe $x \in X$ tal que $Orb_P(x)$ es densa con respecto a la topología débil. Como la topología inducida por la norma es más fuerte que la topología débil, es claro que toda aplicación hipercíclica es débil hipercíclica mientras que la recíproca es falsa. En [38] los autores encontraron el primer ejemplo de un operador que es débil hipercíclico pero no hipercíclico.

También consideraremos la noción de Γ -superciclicidad. Si $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$, diremos que una aplicación $P : X \rightarrow X$ es Γ -supercíclica si existe $x \in X$ (llamado vector Γ -supercíclico) tal que $\Gamma \cdot \text{Orb}_P(x)$ es denso en el espacio. En el caso particular en el que $\Gamma = \mathbb{C}$ o Γ es un singleton recuperamos las nociones de superciclicidad e hiperciclicidad respectivamente. Un resultado importante de Γ -superciclicidad, para $\Gamma = \mathbb{T}$, se debe a León Saavedra y Müller [68], donde probaron que un operador lineal es \mathbb{T} -supercíclico si y sólo si es hipercíclico. Extenderemos este resultado a polinomios homogéneos en espacios de Fréchet arbitrarios en la Proposición 2.2.7. El caso en el que $\Gamma = \mathbb{R}_+$ el fenómeno es también llamado positivamente supercíclico (ver [17, 83]). Para Γ general, el concepto de Γ -superciclicidad fue recientemente introducido por Charpentier, Ernst y Menet en [39]. Ellos probaron que, para operadores lineales, los conjuntos $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ tales que Γ -superciclicidad es equivalente a hiperciclicidad son exactamente los conjuntos Γ que son acotados y tales que 0 no es punto de acumulación de Γ .

Todo espacio de Banach separable y de dimensión infinita admite un polinomio homogéneo supercíclico (ver [21] o Proposición 2.1.16), pero ningún polinomio homogéneo puede ser hipercíclico. En otras palabras esto quiere decir que hay polinomios homogéneos \mathbb{C} -supercíclicos mientras que ningún polinomio homogéneo es $\{*\}$ -supercíclico. Es natural entonces preguntarse para que conjuntos $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ es posible encontrar polinomios homogéneos Γ -supercíclicos en espacios de Banach.

2.2.1. Observaciones sobre δ -hiperciclicidad

Notemos que si x es un vector δ -hipercíclico, entonces $x \in J_P$. En efecto, en caso contrario $P^n(x) \rightarrow \infty$ o $P^n(x) \rightarrow 0$ contradiciendo la δ -densidad de $\text{Orb}_P(x)$.

Si $R_P \neq \emptyset$, observemos que R_P contiene bolas de radio arbitrariamente grande. En efecto, si $B_\epsilon(y) \subseteq R_P$ entonces $B_{|t|\epsilon}(ty) \subseteq R_P$ para todo $|t| > 1$. Podemos encontrar entonces bolas de radio arbitrariamente grande que no intersecan a J_P . Como todo vector δ -hipercíclico pertenece a J_P , se sigue que el polinomio no es δ -hipercíclico, y entonces tenemos lo siguiente.

Observación 2.2.1. Si $R_P \neq \emptyset$ entonces P no es δ -hipercíclico.

Proposición 2.2.2. Sean X, Y espacios de Banach, $F : X \rightarrow X$ y $G : Y \rightarrow Y$ aplicaciones continuas tales que G es cuasiconjugado de F via un operador lineal $\Phi : X \rightarrow Y$. Si F es δ -hipercíclico entonces G es $(\delta\|\Phi\| + \epsilon)$ -hipercíclico para todo $\epsilon > 0$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ Y & \xrightarrow{G} & Y \end{array}$$

Demostración. Sean x un vector δ -hipercíclico para F y $\epsilon > 0$. Sea $y \in Y$ y tomemos $x_0 \in X$ tal que $\|\Phi(x_0) - y\| < \epsilon$. Como x es un vector δ -hipercíclico, existe $l > 0$ tal que $\|F^l(x) - x_0\| < \delta$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \|G^l \Phi(x) - y\| &= \|\Phi F^l(x) - y\| \leq \|\Phi F^l(x) - \Phi(x_0)\| + \|\Phi(x_0) - y\| \\ &\leq \delta \|\phi\| + \epsilon. \end{aligned}$$

□

2.2.2. Observaciones sobre débil hiperciclicidad

Las órbitas que pertenecen a R_P tienden a infinito rápido. Esto fuerza a que la órbita sea débil cerrada y luego las órbitas en R_P están lejos de ser débil densas.

Proposición 2.2.3. *Sea $x \notin J_P$. Entonces $Orb_P(x)$ es un conjunto cerrado débil.*

Para la prueba vamos a necesitar el siguiente resultado, que se puede encontrar en [13, Proposición 10.1].

Proposición 2.2.4. *Si existen constantes $k > 0$ y $C > 1$ tal que $\|x_n\| \geq kC^n$, entonces $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es débil cerrado.*

Prueba de la Proposición 2.2.3. Si $x \in A_P$, $P^n(x) \rightarrow 0$ y luego $\{P^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado débil. Si $x \in R_P$, hay un $t > 1$ tal que $\frac{x}{t} \in R_P$. Entonces $\|P^n(x)\| = t^{m^n} \|P^n(\frac{x}{t})\| \geq t^{m^n} r_P$. Utilizando la proposición de arriba concluimos que $Orb_P(x)$. □

Corolario 2.2.5. *Sea x un vector débil hipercíclico para un polinomio homogéneo. Entonces $x \in J_P$.*

Es sabido que los polinomios homogéneos no son necesariamente débil-débil continuos y luego $(P, (X, \omega))$ no es verdaderamente un sistema dinámico. Sin embargo la propiedad de ser débil hipercíclico es preservada bajo quasiconjugación siempre y cuando el factor Φ es débil-débil continuo y Φ tiene rango débil denso.

Proposición 2.2.6. *Sean X, Y espacios de Fréchet, $P \in \mathcal{P}(^m X; X)$, $Q \in \mathcal{P}(^m Y; Y)$ y $\Phi : X \rightarrow Y$ una aplicación débil-débil continua con rango débil denso tal que Q es quasiconjugado de P bajo el factor lineal Φ .*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{P} & X \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ Y & \xrightarrow{Q} & Y \end{array}$$

Si P es débil hipercíclico entonces también lo es Q .

Demostración. Sea $x \in X$ un vector hipercíclico para P . Como $\overline{Orb_P(x)}^\omega = X$ y Φ es débil-débil continuo con rango débil denso, tenemos que $Y = \overline{\Phi(Orb_P(x))}^\omega = \overline{Orb_Q(\Phi(x))}^\omega$. □

2.2.3. Observaciones y ejemplos sobre Γ -superciclicidad

Recordemos que los conjuntos $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ tal que todo operador Γ -supercíclico es hipercíclico son los conjuntos Γ tal que Γ es acotado y tal que 0 no es punto de acumulación de Γ [39]. Generalizamos este resultado a polinomios homogéneos en espacios de Fréchet.

Proposición 2.2.7. *Sea X un espacio de Fréchet y $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ acotado tal que 0 no es punto de acumulación de Γ . Si P es un polinomio homogéneo Γ -supercíclico, entonces P es hipercíclico.*

En particular, si X es un espacio de Banach entonces ningún polinomio homogéneo es Γ -supercíclico para Γ acotado y tal que 0 no es punto de acumulación de Γ .

Demostración. Probaremos que P es transitivo. Sean U, V conjuntos abiertos y tomemos $x \in U$ un vector Γ -supercíclico. Luego, hay sucesiones $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$, $(\theta_k)_k \subset [0, 2\pi)$ y $(r_k)_k \subset \mathbb{R}_{>0}$ tal que $r_k e^{i\theta_k} \in \Gamma$ y $r_k e^{i\theta_k} P^{n_k}(x) \in V$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Notemos que $r_k^{\frac{1}{m^{n_k}}} e^{\frac{i\theta_k}{m^{n_k}}} x \rightarrow x$ y luego $r_k^{\frac{1}{m^{n_k}}} e^{\frac{i\theta_k}{m^{n_k}}} x$ pertenece eventualmente a U . Por otro lado tenemos que $P^{n_k}(r_k^{\frac{1}{m^{n_k}}} e^{\frac{i\theta_k}{m^{n_k}}} x) = r_k e^{i\theta_k} P^{n_k}(x) \in V$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Concluimos que P es transitivo. \square

Tenemos también el siguiente resultado.

Observación 2.2.8. *Sea P un polinomio homogéneo Γ -supercíclico en un espacio de Banach y x un vector Γ -supercíclico. Si Γ es acotado entonces $x \notin A_P$ y si 0 no es punto de acumulación de Γ entonces $x \in A_P$.*

Un vector Γ -supercíclico no necesariamente pertenece a J_P . En efecto, en el Ejemplo 2.2.14 y 2.2.15 en el Teorema 2.2.16 mostraremos vectores Γ -supercíclicos pertenecientes a A_P , R_P y J_P , respectivamente.

Si el factor Φ es lineal, entonces Γ -superciclicidad se preserva bajo quasiconjugación.

Proposición 2.2.9. *Sean P, Q polinomios homogéneos tal que Q es quasiconjugado de P bajo un factor lineal Φ . Si P es Γ -supercíclico, entonces también lo es Q .*

Demostración. Si $\Gamma \cdot \text{Orb}_P(x)$ es denso entonces $\Gamma \cdot \text{Orb}_Q(\Phi(x)) = \Gamma \cdot \Phi(\text{Orb}_P(x)) = \Phi(\Gamma \cdot \text{Orb}_P(x))$ es también denso porque Φ tiene rango denso. \square

Como en el caso lineal podemos definir la noción de Γ -transitividad. Ésta es una herramienta útil para probar Γ -superciclicidad.

Definición 2.2.10. *Sea X un espacio de Fréchet separable. Decimos que un polinomio $P \in \mathcal{P}(^m X; X)$ es Γ -transitivo, si para cada par de abiertos U y V no vacíos, existe $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in \Gamma$ tal que*

$$\lambda P^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Es muy sencillo verificar que Γ -transitividad implica Γ -superciclicidad. Más aún, en este caso, el conjunto de vectores Γ -supercíclicos es residual. Sin embargo la recíproca es falsa. En efecto, si X es Banach y Γ es acotado entonces ningún polinomio homogéneo es Γ -transitivo.

Proposición 2.2.11. Sean X un espacio de Fréchet separable y $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$. Si $P \in \mathcal{P}(^m X; X)$ es Γ -transitivo entonces P es Γ -supercíclico.

Demostración. Sea $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una base de abiertos de X . Para cada $\gamma \in \Gamma$ y cada k tomamos $\gamma^{\frac{1}{m^k}}$ una m^k -raíz de γ . Consideremos para cada i ,

$$G_i := \bigcup_{k, \gamma \in \Gamma} \gamma^{\frac{1}{m^k}} P^{-k}(V_i).$$

Como P es Γ -transitivo, G_i es un abierto denso para todo i . Luego, $G = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i$ es no vacío. Finalmente notamos que todo vector en G es un vector Γ -supercíclico. \square

Proponemos el siguiente criterio para estudiar Γ -transitividad.

Definición 2.2.12 (Criterio de Γ -transitividad). Decimos que P satisface el criterio de superciclicidad para (λ_k) si existen conjuntos densos X_0 e Y_0 y aplicaciones $S_k(x) : Y_0 \rightarrow X$ tal que para todos $x \in X_0$, $y \in Y_0$ vale que,

- i) $S_k(x)(y) \rightarrow 0$ y
- ii) $\lambda_k P^{n_k}(x + S_k(x)(y)) \rightarrow y$.

Proposición 2.2.13. Sea $(X, (\rho_n)_n)$ un espacio de Fréchet separable, donde $(\rho_n)_n$ es un sistema fundamental no decreciente de seminormas, y sea P un polinomio homogéneo. Entonces P satisface el criterio de Γ -transitividad con respecto a alguna sucesión $(\lambda_k) \subseteq \Gamma$ si y sólo si P es Γ -transitivo.

Demostración. Supongamos primero que P satisface el criterio de Γ -transitividad con respecto a (λ_k) . Sean U, V conjuntos abiertos. Sea $x \in U \cap X_0$ y $y \in V \cap Y_0$. Como $S_k(x)(y) \rightarrow 0$ hay un $x + S_k(x)(y) \in U$ para k suficientemente grande. Como $\lambda_k P^{n_k}(x + S_k(x)(y)) \rightarrow y$ existe un k tal que $P^{n_k}(x + S_k(x)(y)) \in V$.

Supongamos ahora que P es Γ -transitivo. Sea $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión densa en X . Sean $X_0 = Y_0 = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Fijemos $x, y \in X_0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ hay un $z_k \in \{w : \rho_k(x - w) < \frac{1}{k}\}$ tal que para algún $n_k > n_{k-1}$ y $\lambda_k \in \Gamma$ tenemos que $\lambda_k P^{n_k}(z_k) \in \{w : \rho_k(y - w) < \frac{1}{k}\}$. Definimos $S_k(x)(y) = z_k - x$. Como $z_k \rightarrow x$, tenemos que $S_k(x)(y) \rightarrow 0$ y $\lambda_k P^{n_k}(x + S_k(x)(y)) \rightarrow y$. \square

Ejemplo 2.2.14. Sea $P : c_0 \rightarrow c_0$ el polinomio m -homogéneo definido como $P(a)_j := a_{j+1}^m$. Entonces P es Γ -supercíclico para todo $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ no acotado.

Demostración. Aplicaremos el Criterio 2.2.12. Sean $X_0 = Y_0 = c_{00}$ y $x, y \in c_{00}$. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ sea $\lambda^{\frac{1}{m}}$ cualquier m -raíz de λ . Sea $F : c_{00} \rightarrow c_{00}$ definida como

$$F(a)_j := \begin{cases} \lambda^{\frac{1}{m}} a_{j-1} & \text{if } j \neq 1 \\ 0 & \text{if } j = 1, \end{cases}$$

y definimos $S_k(x)(y) = \frac{F^k(y)}{\lambda_k^{\frac{1}{m^k}}}$, donde $\lambda_k \in \Gamma$ es elegido tal que $\lambda_k^{\frac{1}{m^k}}$ tiende a infinito.

Como $\|F(y)\| \leq \max\{1, \|y\|\}$ tenemos que $S_k(x)(y) \rightarrow 0$. Por otro lado, si $k > \max\{j : x_j \neq 0\}$ se sigue que

$$\lambda_k P^k(x + S_k(x)(y)) = \lambda_k P^k S_k(x)(y) = P^k F^k(y) = y.$$

Por la Proposición 2.2.13, P es Γ -transitivo y luego Γ -supercíclico. \square

El polinomio anterior no puede proveer un ejemplo de un polinomio homogéneo Γ -supercíclico para Γ acotado. En efecto, si Γ es acotado, entonces por la Observación 2.2.8 los vectores Γ -supercíclicos no pertenecen a A_P , pero en este caso $A_P = c_0$. Lo mismo sucede si consideramos el mismo polinomio en ℓ_p , $1 \leq p < \infty$. Sin embargo, en el espacio c formado por las sucesiones convergentes la situación es diferente.

Ejemplo 2.2.15. Sea $P : c \rightarrow c$ definido como $P(a)_j = a_{j+1}^m$. Entonces P es \mathbb{D} -supercíclico.

Demostración. Para $A \subseteq \mathbb{N}$ denotamos por $\mathbf{1}_A$ al vector característico de A , i.e.,

$$\mathbf{1}_A(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in A; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para cada $\lambda = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ sea $\lambda^{\frac{1}{n}}$ el número $r^{\frac{1}{n}} e^{i\theta/n}$.

Definimos $F : c \rightarrow c$ como

$$F(a)_j := \begin{cases} a_{j-1}^{\frac{1}{m}} & \text{if } j > 1; \\ 0 & \text{if } j = 1. \end{cases}$$

Claramente F está bien definida y $P^k F^k = Id$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea $(\tilde{y}_n)_n$ una sucesión densa en c tal que $(\tilde{y}_n)_n = (y_n)_n + (l_n \mathbf{1}_{\text{supp}(y_n)^c})_n$, donde $(y_n)_n$ es una sucesión densa en c_{00} , y $(l_n)_n$ es una sucesión en \mathbb{C} . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que para todo n , $l_n \neq 0$ y $\text{supp}(y_n) = [1, m(y_n)]$, donde $m(y_n) := \max\{j : [y_n]_j \neq 0\}$.

Podemos construir, por inducción, una sucesión $(n_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

i) $n_k > m(y_{k-1}) + n_{k-1}$,

ii) para todo $j \in n_k + \text{supp}(y_k)$, $\left| \frac{[F^{n_k}(y_k)]_j}{l_k^{\frac{1}{m^{n_k}}}} - 1 \right| < \frac{1}{k}$,

iii) para todo $k > 0$, $\frac{l_k}{2^{m^{n_k}}} < 1$ y

iv) para todo $j < k$, y todo $i \in (n_k - n_j) + \text{supp}(y_k)$, $\left| l_j \left(\frac{[F^{n_k - n_j}(y_k)]_i}{l_k^{\frac{m^{n_j}}{m^{n_k}}}} - 1 \right) \right| < \frac{1}{k}$.

Notar que es posible elegir tal sucesión $(n_k)_k$ porque las cuatro propiedades son cumplidas una vez que n_k es suficientemente grande.

Sea $\tilde{x} \in \ell_\infty$ el vector definido como

$$\tilde{x} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2F^{n_j}(y_j)}{l_j^{\frac{1}{m^{n_j}}}}.$$

El vector $\tilde{x} \notin c$ ya que hay gaps con ceros. Por la condición ii) las coordenadas no nulas de \tilde{x} tienden a 2. Llenamos entonces los gaps para obtener un vector bien definido en c . Definimos

$$x = \tilde{x} + 2\mathbf{1}_{\text{supp}(\tilde{x})^c}.$$

Por la condición i), los soportes de $F^{n_j}(y_j)$ son dos a dos disjuntos. En consecuencia,

$$P^k(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} P^k \left(\frac{2F^{n_j}(y_j)}{l_j^{\frac{1}{n_j}}} \right). \quad (2.2)$$

También por la condición i), se sigue que si $k > j$ entonces

$$P^{n_k}(F^{n_j}(y_j)) = 0. \quad (2.3)$$

Afirmamos que x es un vector \mathbb{D} -supercíclico. En efecto, sea k en \mathbb{N} . Por la condición iii) cada $\frac{l_k}{2^{m^{n_k}}} \in \mathbb{D}$ y luego,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{l_k}{2^{m^{n_k}}} P^{n_k}(x) - \tilde{y}_k \right\| &= \left\| \frac{l_k}{2^{m^{n_k}}} P^{n_k}(\tilde{x} + 2\mathbf{1}_{\text{supp}(\tilde{x})^c}) - y_k - l_k \mathbf{1}_{\text{supp}(y_k)^c} \right\| \\ &= \left\| \frac{l_k}{2^{m^{n_k}}} P^{n_k}(\tilde{x}) + \frac{l_k}{2^{m^{n_k}}} 2^{m^{n_k}} P^{n_k}(\mathbf{1}_{\text{supp}(\tilde{x})^c}) - y_k - l_k \mathbf{1}_{\text{supp}(y_k)^c} \right\|. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Observemos que $\mathbb{N} = \text{supp}(P^{n_k}(\tilde{x} + \mathbf{1}_{\text{supp}(\tilde{x})^c})) = \text{supp}(P^{n_k}(\tilde{x})) \cup \text{supp}(P^{n_k}(\mathbf{1}_{\text{supp}(\tilde{x})^c}))$. y que $P^{n_k}(\mathbf{1}_{\text{supp}(\tilde{x})^c}) = \mathbf{1}_{\text{supp}(P^{n_k}(\tilde{x}))^c}$. Más aún, como $\text{supp}(y_k) \subseteq \text{supp}(P^{n_k}(\tilde{x}))$, tenemos también que

$$\mathbf{1}_{\text{supp}(P^{n_k}(\tilde{x})^c)} - \mathbf{1}_{\text{supp}(y_k)^c} = -\mathbf{1}_{(\text{supp}(P^{n_k}(\tilde{x})) \setminus \text{supp}(y_k))}.$$

Por la igualdad (2.2), las observaciones de arriba y la ecuación (2.4),

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{l_k}{2m^{n_k}} P^{n_k}(x) - \tilde{y}_k \right\| &= \left\| \frac{l_k}{2m^{n_k}} P^{n_k}(\tilde{x}) + l_k \mathbf{1}_{\text{supp}(P^{n_k} \tilde{x})^c} - y_k - l_k \mathbf{1}_{\text{supp}(y_k)^c} \right\| \\
 &= \left\| \frac{l_k}{2m^{n_k}} P^{n_k}(\tilde{x}) - y_k - l_k \mathbf{1}_{(\text{supp}(P^{n_k}(\tilde{x})) \setminus \text{supp}(y_k))} \right\| \\
 &= \left\| \frac{l_k}{2m^{n_k}} P^{n_k} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2F^{n_j}(y_j)}{l_j^{\frac{1}{m^{n_j}}}} \right) - y_k - l_k \mathbf{1}_{(\text{supp}(P^{n_k}(\tilde{x})) \setminus \text{supp}(y_k))} \right\| \\
 &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{l_k}{2m^{n_k}} P^{n_k} \left(\frac{2F^{n_j}(y_j)}{l_j^{\frac{1}{m^{n_j}}}} \right) - y_k - l_k \mathbf{1}_{(\text{supp}(P^{n_k}(\tilde{x})) \setminus \text{supp}(y_k))} \right\| \\
 &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{l_k}{l_j^{\frac{m^{n_k}}{m^{n_j}}}} P^{n_k}(F^{n_j}(y_j)) - y_k - l_k \mathbf{1}_{(\text{supp}(P^{n_k}(\tilde{x})) \setminus \text{supp}(y_k))} \right\| \\
 &\leq \left\| \sum_{j < k} \frac{l_k}{l_j^{\frac{m^{n_k}}{m^{n_j}}}} P^{n_k} F^{n_j}(y_j) \right\| + \left\| \frac{l_k}{l_k^{\frac{m^{n_k}}{m^{n_k}}}} y_k - y_k \right\| \\
 &+ \left\| \sum_{j > k} \frac{l_k}{l_j^{\frac{m^{n_k}}{m^{n_j}}}} (F^{n_j - n_k}(y_j)) - l_k \mathbf{1}_{(\text{supp}(P^{n_k}(\tilde{x})) \setminus \text{supp}(y_k))} \right\|.
 \end{aligned}$$

Por la igualdad (2.3) el primer término de la última expresión es cero. Notemos también que $\text{supp} \left(\sum_{j > k} F^{n_j - n_k}(y_j) \right) = \text{supp}(P^{n_k}(\tilde{x})) - \text{supp}(y_k)$. Luego, por la propiedad iv),

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{j > k} \frac{l_k}{l_j^{\frac{m^{n_k}}{m^{n_j}}}} (F^{n_j - n_k}(y_j)) - l_k \mathbf{1}_{(\text{supp}(P^{n_k}(\tilde{x})) \setminus \text{supp}(y_k))} \right\| &= \sup_{j > k} \sup_{i \in n_j - n_k + \text{supp}(y_j)} \left\{ \left| l_k \left(\frac{[F^{n_j - n_k}(y_j)]_i}{l_j^{\frac{m^{n_k}}{m^{n_j}}}} - 1 \right) \right| \right\} \\
 &\leq \sup_{j > k} \frac{1}{j} = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Esto implica que x es un vector \mathbb{D} -supercíclico. \square

En el Ejemplo 2.1.20 probamos que el conjunto de Julia del polinomio de arriba es $J_P = \{x \in \mathbb{C} : \text{lím } x_j \in \mathbb{T}\}$. Como para cada $\lambda \in \mathbb{D}$ y cada $x \in J_P$, $\text{lím } \lambda x_j \in \mathbb{D}$, se sigue que si x es un vector \mathbb{D} -supercíclico entonces $x \in R_P$.

2.2.4. Un ejemplo inspirador

Procedemos con el ejemplo principal del capítulo. Probaremos en esta sección que el polinomio 2-homogéneo $P : \ell_p \rightarrow \ell_p$ definido como $P = e'_1 \cdot B$, donde B es el operador coshift es, débil hipercíclico, δ -hipercíclico para todo $\delta > r_P$ y Γ -supercíclico para todo $\Gamma \subset \mathbb{C}$ tal que Γ es no acotado o tal que 0 es punto de acumulación de Γ . La prueba se basa en las propiedades de su conjunto de Julia J_P .

Teorema 2.2.16. Sean $X = c_0$ o $X = \ell_p$, $1 \leq p < \infty$, y $P : X \rightarrow X$ definido como

$$P(x) = e'_1(x)B(x) = x_1(x_2, x_3, \dots),$$

donde $B : X \rightarrow X$ es el operador coshift. Entonces $P|_{J_P}$ es caótico y, si $x_0 \in J_P$ es cualquier vector tal que $\text{Orb}_P(x_0)$ es densa en J_P entonces

1. x_0 es un vector débil hipercíclico,
2. x_0 es un vector δ -hipercíclico, para todo $\delta > r_P$,
3. x_0 es un vector Γ -supercíclico vector, para todo $\Gamma \subset \mathbb{C}$ tal que 0 es un punto de acumulación de Γ .

Más aún, P es Γ -supercíclico para todo $\Gamma \subset \mathbb{C}$ no acotado.

Probaremos el resultado para $X = \ell_p$, ya que para $X = c_0$ la prueba es análoga. Dividiremos la demostración en varios pasos. Primero mostraremos que $P|_{J_P}$ es caótico y luego que el conjunto de Julia J_P es débil denso, δ -denso para todo $\delta > r_P$ y que $\overline{\Gamma \cdot J_P} = \ell_p$ para todo Γ tal que cero es punto de acumulación de Γ . Toda órbita densa en J_P hereda las propiedades mencionadas.

Como en el caso en el que 0 no es punto de acumulación de Γ , los vectores Γ -supercíclicos deben pertenecer a A_P , el caso en el que Γ es no acotado (pero no necesariamente con 0 punto de acumulación) será tratado de forma separado.

Empezamos calculando la norma de P . El problema es equivalente a maximizar la función $f(x, y) = xy$ bajo las restricciones $x^p + y^p = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Aplicando múltiplos de Lagrange se sigue que $\|P\| = 2^{-\frac{2}{p}}$. Luego, $r_P = 2^{\frac{2}{p}}$.

Notemos que $P^n(x) = c_n(x)B^n(x)$, donde

$$c_n(x) = x_1^{2^{n-1}} \cdot x_2^{2^{n-2}} \cdot \dots \cdot x_n; \quad (2.5)$$

equivalentemente $c_n(x)$ puede ser definido recurrentemente bajo las relaciones

$$\begin{cases} c_1(x) = x_1 \\ c_{n+1}(x) = c_n^2(x)x_{n+1}. \end{cases}$$

Debido a que $c_{00} \subseteq A_P$, se sigue que A_P es denso y $R_P = \emptyset$. Por la Proposición 2.1.11 J_P tiene que ser completamente invariante. Si $x \in J_P$ y $|t| \geq 1$ entonces $tx \notin A_P$ y, como $R_P = \emptyset$, tx debe pertenecer a J_P . Podemos pensar entonces a J_P como una unión infinita de semirectas.

Verifiquemos que $J_P \neq \emptyset$. El siguiente vector es un punto fijo de P .

$$\bar{x} = 2^{\frac{1}{p}} \left(1, \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}, \frac{1}{2^{\frac{2}{p}}}, \frac{1}{2^{\frac{3}{p}}}, \dots \right).$$

Como \bar{x} es punto fijo, entonces, por la Proposición 2.1.2, debe pertenecer a J_P . Además, $\bar{x} \in r_P S_X$ ya que

$$\|\bar{x}\|_p^p = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{i}{p}}} \right)^{ip} = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$

Prueba de que $P|_{J_P}$ es caótico. Como J_P es cerrado y P -invariante, por el Teorema de transitividad de Birkhoff $P|_{J_P}$ es caótico si y sólo si $P|_{J_P}$ es transitivo y los vectores periódicos de P son densos en J_P .

Sean U, V abiertos no vacíos de X que intersecan a J_P . Sea $y \in V \cap J_P$, $x \in U \cap J_P$. Como $B^n(x) \rightarrow 0$ y $\|P^n(x)\| = |c_n(x)|\|B^n(x)\| \geq r_P$ tenemos que $c_n(x) \rightarrow \infty$.

Perturbaremos al vector x de forma tal que el nuevo vector \tilde{x} cumpla que $\tilde{x} \in U$ y para algún n $P^n(\tilde{x}) = y$. Notemos que como J_P es completamente invariante, esto implica que $\tilde{x} \in J_P$.

Consideremos x^n el vector $x^n = \sum_{i=1}^n e'_i(x)e_i$.

Claramente $x^n \rightarrow x$ in ℓ_p . Como $c_n(x)$ lee solamente las primeras n coordenadas, $c_n(x) = c_n(x^n)$. Consideremos $\tilde{x}^n = x^n + \frac{S^n(y)}{c_n(x)}$, donde S el shift. Como $\|S^n(y)\|_p = \|y\|_p$ y $c_n(x) \rightarrow \infty$, se sigue que $\frac{S^n(y)}{c_n(x)} \rightarrow 0$. Luego, para n arbitrariamente grande, $\tilde{x}^n \in U$. Además,

$$\begin{aligned} P^n(\tilde{x}^n) &= c_n(\tilde{x}^n)B^n\left(x^n + \frac{S^n(y)}{c_n(x)}\right) \\ &= c_n(x)\frac{y}{c_n(x)} = y. \end{aligned}$$

Tomamos entonces $\tilde{x} = \tilde{x}^n$ para n suficientemente grande.

A continuación mostraremos que los vectores periódicos son densos en J_P . Sean $y \in J_P$ y $\epsilon > 0$. Como $y \in J_P$, existe un n_0 con $|c_n(y)| > 1$ para todo $n \geq n_0$. Consideremos $y^n = \sum_{i=1}^n e'_i(y)e_i$. El vector

$$\tilde{y}^n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{S^{ni}(y^n)}{c_n(y)^i} = y^n + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S^{ni}(y^n)}{c_n(y)^i}$$

es n -periódico para P . En efecto,

$$\begin{aligned} P^n(\tilde{y}^n) &= c_n(\tilde{y}^n)B^n\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{S^{ni}(y^n)}{c_n(y)^i}\right) = c_n(y) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^n S^{ni}(y^n)}{c_n(y)^i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S^{n(i-1)}(y^n)}{c_n(y)^{i-1}} = \tilde{y}^n. \end{aligned}$$

Si $n \geq n_0$ el vector está bien definido, ya que

$$\|\tilde{y}^n\|_p \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|S^{ni}(y^n)\|_p}{|c_n(y)|^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|y\|_p}{|c_n(y)|^i} < \infty.$$

Finalmente observemos que $\tilde{y}^n \rightarrow y$,

$$\|\tilde{y}^n - y^n\|_p \leq \|y\|_p \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|c_n(y)|^i} \rightarrow 0.$$

□

Prueba de que J_P es δ -denso para $\delta > r_P$. Sea $x \in \ell_p$. Recordemos que el vector $\bar{x} = 2^{\frac{1}{p}} \left(1, \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}, \frac{1}{2^{\frac{2}{p}}}, \frac{1}{2^{\frac{3}{p}}}, \dots\right)$ pertenece a J_P y que tiene norma igual a r_P . Denotando a $sign(0) = 1$ definimos \tilde{x} como

$$\tilde{x}_i = sign(x_i) \max\{|x_i|, |\bar{x}_i|\}.$$

Para cada i tenemos que $|\tilde{x}_i| \geq |\bar{x}_i|$. Esto implica que para cada n , $\|P^n(\tilde{x})\|_p \geq \|P^n(\bar{x})\|_p \geq r_P$ y luego el vector pertenece a J_P . Además $\|x - \tilde{x}\|_p \leq \|\bar{x}\|_p = r_P$. \square

Prueba de que J_P es débil denso. Sea $U = U_{\{\epsilon, x_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}}$ un abierto débil básico.

Sea $0 \neq y \in \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(\varphi_i)$. Sean $M = \max\{\|\varphi_i\|\}$ y $\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{M}$. Consideramos para cada $n \in \mathbb{N}$, $y^n = n \cdot y + x_0$. Este vector y^n puede no pertenecer a J_P , sin embargo podemos encontrar un perturbación x^n de y^n tal que $x^n \in J_P \cap U$. Denotando otra vez $\text{sign}(0) = 1$ y considerando el vector fijo \bar{x} , definimos

$$x_j^n := \text{sign}(y_j^n) \max\{|y_j^n|, \frac{\tilde{\epsilon}}{r_P} |\bar{x}_j|\}.$$

Claramente $\|x^n - y^n\|_p \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{r_P} \|\bar{x}\|_p = \tilde{\epsilon}$. Afirmamos que para n suficientemente grande, $x^n \in J_P$. Sea k tal que $y_k \neq 0$, esto implica que $0 \neq x_k^n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$.

El vector

$$z^n = \frac{\tilde{\epsilon}}{r_P} (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{k-1}, x_k^n, \bar{x}_{k+1}, \dots)$$

satisface que $|x_j^n| \geq |z_j^n|$ para todo $j \geq 0$ y luego si z^n pertenece a J_P , así lo hace x^n . Basta ver entonces que z^n pertenece a J_P para n suficientemente grande. Notemos que

$$P^k(z^n) = \left(\frac{\tilde{\epsilon}}{r_P}\right)^{2k} \frac{c_k((\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{k-1}, x_k^n, \bar{x}_{k+1}, \dots))}{c_k(\bar{x})} P^k(\bar{x}) = \left(\frac{\tilde{\epsilon}}{r_P}\right)^{2k} \frac{x_k^n}{\bar{x}_k} P^k(\bar{x}) = \left(\frac{\tilde{\epsilon}}{r_P}\right)^{2k} \frac{x_k^n}{\bar{x}_k} \bar{x}.$$

Luego para n suficientemente grande obtenemos que $P^k(z^n) = \lambda \bar{x}$ para algún $|\lambda| \geq 1$ y luego $P^k(z^n) \in J_P$ para n grande. Como J_P es completamente invariante esto implica que $z^n \in J_P$.

Finalmente x^n pertenece a U ya que $|\varphi_i(x^n - x_0)| \leq \|\varphi_i\| \|x^n - y^n\|_p + |\varphi_i(y^n - x_0)| \leq \epsilon$. \square

Prueba de que $\Gamma \cdot J_P$ es denso para todo Γ tal que 0 es un punto de acumulación de Γ . Sea $x \in \ell_p$, $\epsilon > 0$ y $\gamma \in \Gamma$ tal que $\frac{\epsilon}{r_P \gamma} > 1$. Consideramos

$$z = \frac{1}{\gamma} \text{sign}(x_j) \max\{|x_j|, \frac{\epsilon}{r_P} \bar{x}_j\}.$$

El vector z pertenece a J_P , porque para cada coordenada $|z_j| > |\bar{x}_j|$ y $\bar{x}_j \in J_P$. Es también inmediato verificar que $\|\gamma z - x\|_p < \epsilon$. \square

Prueba de que P es Γ -supercíclico para todo Γ no acotado. Aplicaremos el Criterio 2.2.12. Sean $X_0 = Y_0$ un conjunto de vectores densos con coordenadas no nulas. Para $x, y \in X_0$ fijos tomamos $(\lambda_n)_n \subset \Gamma$ tal que $\lambda_n c_n(x) \rightarrow \infty$. Sea x^n el vector $x_j^n = \chi_{[1,n]}(j) x_j$, i.e. x^n es el truncado de x . Finalmente definimos las aplicaciones inversas $F_n(x)$ como $F_n(x)(y) = x^n - x + \frac{S^n(y)}{c_n(x)\lambda_n}$, donde S es el operador shift. Es claro que $F_n(x)(y) \rightarrow 0$. Además

$$\begin{aligned} \lambda_n P^n(x + F_n(x)(y)) &= \lambda_n P^n\left(x^n + \frac{S^n(y)}{c_n(x)\lambda_n}\right) = \lambda_n c_n\left(x^n + \frac{S^n(y)}{c_n(x)\lambda_n}\right) B^n\left(x^n + \frac{S^n(y)}{c_n(x)\lambda_n}\right) \\ &= \lambda_n c_n(x) \frac{y}{c_n(x)\lambda_n} = y. \end{aligned}$$

\square

Finalizamos el ejemplo remarcando algunos comentarios. Primero, notemos que hay órbitas δ -densas para δ arbitrariamente chicos.

Observación 2.2.17. Para todo $\delta > 0$ hay un polinomio homogéneo que es δ -hipercíclico.

Demostración. Sea P el polinomio 2-homogéneo definido en el teorema anterior. Por la Proposición 2.1.5, λP es conjugado a P para todo $\lambda \neq 0$ via un isomorfismo lineal de norma $\frac{1}{|\lambda|}$. Por la Proposición 2.2.2, esto implica que λP es δ -hipercíclico para todo $\delta > r_{\lambda P} = \frac{r_P}{|\lambda|}$. \square

Observación 2.2.18. La Proposición 2.1.13 dice que tx con $|t| < 1$ no es un punto de acumulación de $Orb_P(x)$. El ejemplo anterior muestra que esto no es cierto para $|t| \geq 1$. En efecto, si x un punto tal que su P -órbita es densa en J_P , tx está en J_P para $|t| \geq 1$ y luego es un punto de acumulación de la P -órbita de x .

Observación 2.2.19. Sea P el polinomio definido en el ejemplo anterior. Entonces, J_P es arcoconexo.

Demostración. Sean $x, y \in J_P$ y consideremos $z = \sum_{j=1}^{\infty} \max\{|x_j|, |y_j|\} e_j$. Claramente z está bien definido y como las coordenadas de z son mayores o iguales que las de x , tenemos que $z \in J_P$. Afirmamos que hay un camino de x a y contenido en J_P . En efecto, sea ϕ_j cualquier camino de x_j a $\max\{|x_j|, |y_j|\}$ tal que $\max\{|x_j|, |y_j|\} \geq |\phi_j(t)| \geq x_j$ para todo t . Luego, $\Phi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(t) e_j$ es un camino de x a z y como las coordenadas de $\Phi(t)$ tienen módulo menor que las coordenadas de x se sigue que $\Phi(t)$ pertenece a J_P . Análogamente hay un camino de z a y lo que implica que J_P es arcoconexo. \square

Observación 2.2.20. El conjunto de Julia del polinomio definido en el Teorema 2.2.16 satisface otra propiedad llamativa: la imagen de J_P via el operador coshift es densa en ℓ_p . Esto implica que toda órbita densa en J_P tiene que satisfacer que $\overline{\{B(P^n(x))\}} = \ell_p$. Luego, la familia de polinomios homogéneos $\{c_n(\cdot)B^{n+1}(\cdot)\}$ es universal mientras que $\{c_n(\cdot)B^n(\cdot)\} = \{P^n\}$ tiene solamente órbitas nunca densas.

Prueba de que $\overline{B(J_P)} = \ell_p$. Sean $\epsilon > 0$ y $x \in \ell_p$. Sea \bar{x} un punto fijo de P tal que $\|\bar{x}\|_p = r_P$. Definimos $y \in \ell_p$ como $y_n = \text{sign}(x_n) \max\{|x_n|, \epsilon|\bar{x}_n|\}$. Luego, $\|y - x\|_p \leq \epsilon r_P$ y $|y_n| \geq \epsilon|\bar{x}_n|$ para todo n . Consideramos $z = \frac{y}{\epsilon} + S(y)$. Luego $B(z) = y$ y $z \in J_P$. En efecto, $P(z) = \frac{y}{\epsilon}$ que satisface que $|\frac{y_n}{\epsilon}| > |\bar{x}_n|$ para toda coordenada n . Luego, $P(z)$ pertenece a J_P y entonces z pertenece también a J_P . \square

Recordemos que un sistema (X, F) se dice Devaney caótico si es transitivo, los vectores periódicos son densos y si exhibe *dependencia sensible a las condiciones iniciales*. Esta última condición quiere decir que existe un entorno U del 0 tal que para todo $x \in X$ y todo entorno V del 0, hay un $n \in \mathbb{N}$ e $y \in x + V$ tal que $F^n(y) \notin U + F^n(x)$. En espacios métricos, dependencia sensible a las condiciones iniciales es implicado por transitividad y densidad de los vectores periódicos y, por supuesto, no hay polinomios homogéneos no lineales en espacios de Banach que admitan dependencia sensible a las condiciones iniciales. Sin embargo, considerando la topología

débil podemos obtener polinomios homogéneos Devaney caóticos. En efecto, si P es el polinomio definido en el Teorema 2.2.16, ya probamos que $P|_{J_P}$ satisface que es transitivo y que los puntos periódicos son densos, y más aún vimos que J_P es débil denso en ℓ_p . Esto implica que $P : \ell_p \rightarrow \ell_p$ satisface las primeras dos condiciones de caos en el sentido de Devaney. Para ver la última, tomemos $U = \{x \in \ell_p : |x_1| < 1\}$. Entonces para $x \in \ell_p$, y V un entorno débil de 0, el cual podemos suponer que, para algún $\epsilon > 0$ y algún n , $V \supset \{x \in \ell_p : |x_j| < \epsilon, j = 1, \dots, n\}$. Definamos $y \in \ell_p$ como,

$$y_k = \begin{cases} \epsilon/2 & \text{if } k \leq n, x_k = 0, \\ x_k & \text{if } k \leq n, x_k \neq 0, \\ c & \text{if } k = n + 1, \\ 0 & \text{if } k > n + 1. \end{cases}$$

Entonces $y \in x + V$ para todo c y

$$e'_1(P^n x - P^n y) = e'_1(c_n(x)B^n(x) - c_n(y)ce_1) = c_n(x)x_{n+1} - c_n(y)c.$$

Como $c_n(y) \neq 0$ y no depende de c , podemos tomar c tal que $|e'_1(P^n x - P^n y)| > 1$ y luego $P^n(y) \notin U + P^n(x)$. Concluimos que $P = e'_1 \cdot B$ es Devaney caótico en (ℓ_p, w) .

Ejemplo 2.2.21. Usando el polinomio P definido en el Teorema 2.2.16, es posible exhibir un polinomio homogéneo cuyo conjunto de Julia no es completamente invariante. Sea $X = \mathbb{C} \oplus_{\infty} c_0(c_0)$ y tomemos $Q \in \mathcal{P}^2(X)$ como

$$Q(\lambda, (y^j)_{j \in \mathbb{N}}) = (0, P(\lambda x), P(y^1), P(y^2), \dots),$$

donde $x \in c_0$ es un vector en el conjunto de Julia de P . Luego, para $|\lambda| > 1$, el vector $(\lambda, (0)_j)$ está en R_Q porque si $|t| > 1$,

$$\|Q^n(t, (y^j)_{j \in \mathbb{N}})\|_X \geq \|P^n(tx)\|_{\infty} \rightarrow \infty.$$

Por otro lado, el vector $Q(\lambda, (0)_j) = (0, P(\lambda x), 0, 0, \dots)$ pertenece a J_Q . En efecto, podemos aproximar $P(\lambda x)$ por un vector $z \in c_0$ con solo finitas coordenadas nulas. Entonces el vector $(0, z, 0, 0, \dots)$ aproxima a $(0, P(\lambda x), 0, 0, \dots)$ en X y claramente, $(0, z, 0, 0, \dots)$ pertenece a A_Q .

2.2.5. Hiperpicicidad numérica

Recordemos que una aplicación F se dice numéricamente hipercíclica si hay vectores $x \in S_X, x^* \in S_{X^*}$, con $x^*(x) = 1$ y tal que su órbita numérica $Norb_F(x, x^*) := \{x^*(F^n(x)) : n \in \mathbb{N}_0\}$ es densa en \mathbb{C} . En [64, 65] los autores probaron que todo espacio de Banach infinito dimensional y separable admite un polinomio homogéneo que es numéricamente hipercíclico de grado $m \geq 1$. En vista del Ejemplo 2.2.16, es esperable que el polinomio $P(x) = x_1 B(x)$ sea numéricamente hipercíclico en ℓ_p o c_0 . Sin embargo, como el radio límite del polinomio es $r_P = 2^{\frac{2}{p}} > 1$ para $X = \ell_p$ y $r_P = 1$ para $X = c_0$, $\|P^n(x)\| \leq r_P$ para todo $x \in S_X$ y todo n , y luego ninguna órbita numérica es densa.

La falta de órbitas numéricamente densas se debe a que $B_X \subseteq r_P B_X$. Considerando un múltiplo del polinomio y explotando que los polinomios homogéneos se llevan bien con conjugación via isomorfismos lineales, podemos exhibir fácilmente un ejemplo de un polinomio homogéneo numéricamente hipercíclico.

Ejemplo 2.2.22 (Un polinomio homogéneo numéricamente hipercíclico). Sea $X = \ell_p$ y $P(x) = x_1 B(x)$. Sea $x_0 \in J_P$ tal que la P -órbita de x_0 es densa J_P . Consideremos $\tilde{P} = \|x_0\|P$. Por la Proposición 2.1.6 aplicada a $\Phi(x) = \frac{1}{\|x_0\|}x$ se sigue que $J_{\tilde{P}} = \|x_0\|J_P$ y que $\frac{x_0}{\|x_0\|}$ es hipercíclico para $\tilde{P}|_{J_{\tilde{P}}}$. Por el Ejemplo 2.2.16 y la Proposición 2.2.6, $\frac{x_0}{\|x_0\|}$ es débil hipercíclico para \tilde{P} . Luego, para todo $x^* \in S_{X^*}$ se sigue que $\overline{x^*(\tilde{P}^n(x))} = \mathbb{C}$.

Observación 2.2.23. Hay varias nociones de rango numérico para aplicaciones no lineales en espacios de Banach, que coinciden para operadores lineales (ver por ejemplo [3, Chapter 11]). El rango numérico en el sentido de Bauer de una aplicación F es el conjunto

$$\{x^*(F(x)) : x^*(x) = \|x\|^2, \|x\| = \|x^*\|\},$$

i.e. las normas de x y x^* pueden ser diferentes de 1i. Inspirados en esta noción de rango numérico, un polinomio sería numéricamente hipercíclico si hay vectores $x \in X, x^* \in X^*$, con $x^*(x) = \|x\|^2, \|x\| = \|x^*\|$ y tal que la órbita numérica $Norb_F(x, x^*) := \{x^*(F^n(x)) : n \in \mathbb{N}_0\}$ es densa en \mathbb{C} . Con esta definición modificada, el polinomio del Teorema 2.2.16 sería numéricamente hipercíclico.

2.3. La clase de polinomios $e'_1 \cdot B$ en $\ell_p(v)$ y $\varphi \cdot B$ en ℓ_p

En esta sección extenderemos el resultado del Teorema 2.2.16 y estudiaremos las familias de polinomios $P_v = e'_1 B$ en el espacio pesado $\ell_p(v)$ y $P_\varphi = \varphi \cdot B$ en ℓ_p , donde φ es un funcional lineal. El Teorema principal de la sección es el Teorema 2.3.4 el cual establece que, bajo condiciones generales, $P_v : J_{P_v} \rightarrow J_{P_v}$ es transitivo. Luego, relacionando cuidadosamente J_{P_v} con el conjunto de Julia de $P = e'_1 B$ estudiado en la sección anterior, extendemos el Teorema 2.2.16 a espacios pesados.

Recordemos que si $(v_n)_n$ es una sucesión de pesos entonces $\ell_p(v)$ es el espacio formado por $\ell_p(v) := \{(x_n)_n : (x_n^p \cdot v_n)_n \in \ell_1\}$ con norma $\|x\|_{\ell_p(v)} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p v_j\right)^{\frac{1}{p}}$ y que un coshift es continuo si y sólo si $\sup_n \frac{v_n}{v_{n+1}} < \infty$.

De la misma forma que la ecuación (2.5) para el polinomio $P = e'_1 B \in \mathcal{P}(\ell_p)$ tenemos que $P_v^n(x) = c_n(x)B^n(x)$, donde

$$c_n(x) := x_1^{2^n - 1} x_2^{2^n - 2} \dots x_n.$$

Análogamente $c_n(x)$ satisface la relación recursiva

$$c_n(x) = \begin{cases} x_1 & \text{if } n > 1 \\ c_{n-1}(x)^2 x_n & \text{if } n > 1. \end{cases}$$

El polinomio P_v tiene también R_{P_v} vacío, esto se deduce gracias al hecho de que $c_{00} \subseteq A_{P_v}$. El siguiente lema impone restricciones en el crecimiento de v_n .

Lema 2.3.1. *Sea $(v_n)_n$ una sucesión de números positivos. Dado $t > 1$, sea $\alpha = \alpha(t) = (\alpha_n)_n$ la sucesión de números reales tal que $v_n = t^{2^n \alpha(n)}$. Entonces $J_{P_v} \neq \emptyset$ si y sólo si $\sup_n \sum_{j=1}^n \alpha(j) < \infty$. En el caso particular de que $(v_n)_n$ es eventualmente más grande que uno, tenemos que $J_{P_v} \neq \emptyset$ si y sólo si $\alpha \in \ell_1$.*

Demostración. Supongamos que $\sup_n \sum_{j=1}^n \alpha(j) < \infty$. Podemos suponer que $v_n > 1$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$, ya que en caso contrario $(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots) \in J_{P_v}$. Sea n_k una subsucesión de números naturales tal que $v_{n_k} > 1$ para todo k , i.e. $\alpha(n_k) > 0$ para todo k .

Sea $x = (x_n)_n = Ct^{-n+2}t^{\frac{-2^n \alpha(n)}{p}}$, donde $C > 1$ es una constante a determinar. Tenemos que $x \in \ell_p(v)$, porque $|x_n^p v_n| = C^p (t^p)^{-n+2} t^{-2^n \alpha(n)} t^{2^n \alpha(n)} = C^p (t^p)^{-n+2} \in \ell_1$.

Notemos que para todo $n_k - 1$ vale que

$$\|B^{n_k-1}(x)\|_{\ell_p(v)}^p = \left\| \left(C^p (t^p)^{-j-n_k-1+2} t^{-2^{j+n_k-1} \alpha(j+n_k-1)} t^{2^j \alpha(j)} \right)_j \right\|_{\ell_1} \geq C^p (t^p)^{-n_k} t^{2^1 \alpha(1) - 2^{n_k} \alpha(n_k)}.$$

Por otro lado, esta vez para n arbitrario,

$$\begin{aligned} c_n(x) &= C^{2^n-1} \prod_{j=1}^n x_j^{2^{n-j}} = C^{2^n-1} \prod_{j=1}^n \left(t^{\frac{-2^j \alpha(j)}{p}} t^{-j+2} \right)^{2^{n-j}} = C^{2^n-1} \prod_{j=1}^n t^{\frac{-2^n}{p} \alpha(j)} \cdot \prod_{j=1}^n (t^{-j+2})^{2^{n-j}} \\ &= C^{2^n-1} t^{\frac{-2^n}{p} \sum_{j=1}^n \alpha(j)} \cdot t^n. \end{aligned}$$

Juntando ambas ecuaciones, tenemos que para $C > t^{\sup_n \sum_{j=1}^n \alpha(j)}$ y $C > t$ que $C^{2^{n_k}} t^{-2^{n_k} \alpha(n_k)} \rightarrow \infty$ y luego

$$\|P^{n_k-1}(x)\| = |c_{n_k-1}(x)| \|B^{n_k-1}(x)\| \rightarrow \infty.$$

Esto implica que $x \notin A_{P_v}$. Como R_{P_v} es el conjunto vacío, se sigue que $x \in J_{P_v}$.

Recíprocamente si $\sup_n \sum_j \alpha(j) = \infty$, mostraremos que $A_{P_v} = \ell_p(v)$. Sea $x \in \ell_p(v)$. Considerando que $|x_n|^p v_n \rightarrow 0$, hay una constante $C > 0$ con $|x_n|^p \leq C |v_n|^{-1} = Ct^{-2^n \alpha(n)}$. Luego,

$$|c_n(x)|^p \leq C^{2^n-1} \prod_{j=1}^n \left(t^{-2^j \alpha(j)} \right)^{2^{n-j}} \leq C^{2^n-1} t^{-2^n \sum_{j=1}^n \alpha(j)}.$$

Si n_k es una subsucesión de números naturales tal que $\sum_{j=1}^{n_k} \alpha(j) \rightarrow \infty$, obtenemos que

$$\|P_v^{n_k}(x)\| = |c_{n_k}(x)| \|B^{n_k}(x)\| \leq \left(C^{2^{n_k}-1} t^{-2^{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \alpha(j)} \right)^{1/p} \|B\|^{n_k} \|x\| \rightarrow 0.$$

Concluimos que $x \in A_{P_v}$. □

El siguiente lema nos permite suponer que los pesos v_j son mayores que uno.

Lema 2.3.2. *Sea $(v_j)_j$ una sucesión de pesos tal que $P_v : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$, $P_v = e'_1 B$ es continuo. Entonces existe una sucesión de pesos $(v'_j)_j$ con $v'_j \geq 1$ para todo j y tal que P_v es conjugado a $P_{v'} : \ell_p(v') \rightarrow \ell_p(v')$, $P_{v'} = e'_1 B$.*

Demostración. Debido a que es acotado tenemos que $\sup_j \frac{v_j}{v_{j+1}} < \infty$. Luego, hay una constante $1 > C > 0$ de modo que $|v_j| \geq C^j$ para todo j . Sea $v'_j = \frac{v_j}{C^j}$. Consideremos primero el polinomio $Q = Ce'_1B$ en $\ell_p(v)$ que es conjugado a P_v .

$$\begin{array}{ccc} \ell_p(v) & \xrightarrow{P_v} & \ell_p(v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell_p(v) & \xrightarrow{CP_v} & \ell_p(v) \end{array}$$

Afirmamos que $(Q, \ell_p(v))$ es conjugado a $(e'_1B, \ell_p(v'))$ vía el factor lineal $\phi : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v')$ dado por $\phi(x_j e_j) = C^{j-1} x_j e_j$.

$$\begin{array}{ccc} \ell_p(v) & \xrightarrow{CP_v} & \ell_p(v) \\ \downarrow C^{j-1} x_j & & \downarrow C^{j-1} x_j \\ \ell_p\left(\frac{v_j}{C^j}\right) & \xrightarrow{P_{v'}} & \ell_p\left(\frac{v_j}{C^j}\right) \end{array}$$

En efecto, ϕ está bien definida por la definición de $\ell_p\left(\frac{v_j}{C^j}\right)$ y dado $x = (x_j)_j$ tenemos que

$$\begin{aligned} \phi Q(x) &= \phi \left(x_1 \cdot \left(\sum_{j=2}^{\infty} C x_j e_{j-1} \right) \right) = x_1 \cdot \sum_{j=2}^{\infty} C^{j-1} x_j e_{j-1} \\ &= e'_1 \cdot B \left(\sum_{j=1}^{\infty} C^{j-1} x_j e_j \right) = e'_1 \cdot B \phi(x). \end{aligned}$$

□

En lo que sigue de la sección supondremos que $v_j \geq 1$ para todo j y, dada la sucesión $\alpha(n) \in \ell_1$ inducida por v_j , denotaremos $\beta_n := \sum_{j>n} \alpha(n)$.

El siguiente lema nos permite encontrar vectores en J_{P_v} .

Lema 2.3.3. *Sea $(v_j)_j$ una sucesión de pesos tal que $v_j \geq 1$ para todo j . Dados números naturales n, m consideramos el vector $x = x(C, n, m) = C(2^{2-j} v_{j+n}^{-m})_j$. Sea $t > 1$ y β_n la sucesión asociada a t . Si $C > t^{2^{n+1} \beta_n m}$, entonces $x \in J_{P_v}$.*

Demostración. Recordemos que $c_k((2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)) = 2^k$. Notemos que $x \in \ell_p(v)$. Esto se deduce gracias a los hechos de que $\sup_j \frac{v_j}{v_{j+1}} < \infty$ y $v_j \geq 1$ para todo j . En efecto,

$$\|x\|_{\ell_p(v)}^p = \sum_{j=1}^{\infty} (2^p)^{2-j} \frac{v_j}{v_{j+n}^{pm}} \leq \|((2^p)^{2-j})_j\|_{\ell_1} \sup_j \frac{v_j}{v_{j+n}} < \infty.$$

Calculamos ahora $c_n(x)$ y $\|B^k(x)\|$ para obtener

$$\begin{aligned} |c_k(x)| &= 2^k C^{2^k-1} \prod_{l=1}^k (t^{-2^{n+l} \alpha(n+l)m})^{2^{k-l}} = 2^k C^{2^k-1} \prod_{l=1}^k t^{-2^{n+k} \alpha(n+l)m} \\ &= 2^k C^{2^k-1} t^{-2^{n+k} m \sum_{l=n+1}^k \alpha(l)}. \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que $\|B^k(x)\| \geq C \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1}{v_{n+k+1}^m} = \frac{1}{2^k} t^{-2^{n+k+1} \alpha(n+k+1)m}$. Luego,

$$\|P^k(x)\| \geq C^{2^k} t^{-2^{n+k+1} m \beta_n} > 1$$

para todo k . □

Estamos en condiciones de probar el Teorema 2.3.4

Teorema 2.3.4. *Sea $(v_j)_j$ una sucesión de pesos que satisface las siguientes condiciones: J_{P_v} es no vacío y existen n y m tales que $\sup_j \frac{v_{j+n}}{v_j^m} < \infty$. Entonces $P_v|_{J_{P_v}}$ es transitivo.*

Demostración. Notemos que la condición $\sup_j \frac{v_{j+n}}{v_j^m} < \infty$ es estable vía la conjugación del Lema 2.3.2. En efecto, si $C < 1$ es la constante de la prueba del Lema 2.3.2 y $\sup_j \frac{v_{j+n}}{v_j^m} < \infty$ entonces $\sup_j \frac{v_{j+n}'}{v_j'^m} = \sup_j \frac{v_{j+n}}{C^{mj+n}} \frac{C^{mj}}{v_j^m} < \infty$. Podemos suponer entonces que $v_j \geq 1$ para todo j .

Ahora que $v_j \geq 1$ tenemos además que $\sup_j \frac{v_{j+kn}}{v_j^m} < \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En efecto, ya lo sabemos para $k = 1$ y si $k > 1$ obtenemos

$$\frac{v_{j+kn}}{v_j^m} = \frac{v_{j+kn}}{v_{j+(k-1)n}} \frac{v_{j+(k-1)n}}{v_j^m} < \sup_j \frac{v_{j+n}}{v_j^m} \sup_j \frac{v_{j+(k-1)n}}{v_j^m} < \infty.$$

Sean $x, y \in J_{P_v}$ y U, V conjuntos abiertos alrededor de x, y respectivamente. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|c_n(x)| \geq t^{2^n}$, $|c_n(y)| \geq t^{2^n}$ para algún $t > 1$, en caso contrario multiplicamos por un $t > 1$ tal que $tx \in U$, $ty \in V$. Luego, por el Lema 2.3.1, $v_j = t^{2^n \alpha(n)}$ para alguna ℓ_1 -sucesión $\alpha(n)$.

Para cada l consideramos $y^l = \sum_{j=1}^l y_j e_j + \sum_{j=l+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2-(j-l)} f(l)} \frac{1}{v_j^m}$, donde $f(n)$ es una sucesión tendiendo a infinito ∞ tal que $\frac{t^{2^{n-1}}}{f(n)} \geq 1$ para todo n . Observamos que $y^l \in \ell_p(v)$ y que, como $f(l) \rightarrow \infty$, $y^l \rightarrow y$. Afirmamos que $y^l \in J_{P_v}$ para l suficientemente grande. En efecto, $P_v^l(y^l) = \frac{c_l(y)}{f(l)} (2^{2-j} v_{j+l}^{-m})_j$ y como J_{P_v} es completamente invariante es suficiente mostrar que $\frac{c_l(y)}{f(l)} (2^{2-j} v_{j+l}^{-m})_j$ pertenece a J_{P_v} . A su vez, por el Lema 2.3.3 es suficiente mostrar que $\frac{c_l(y)}{f(l)} > t^{2^{l+1} m \beta_l}$. Esto es verdadero si $4m\beta_l < 1$ ya que

$$\frac{c_l(y)}{f(l)} \geq \frac{t^{2^l}}{f(l)} \geq t^{2^{l-1}} \geq t^{2^{l-1} 4m\beta_l} = t^{2^{l+1} m \beta_l}.$$

El hecho de que para todo k $\sup_j \frac{v_{j+kn}}{v_j^m} < \infty$ nos garantiza que para todos k, l $S^{kn}(y^l)$ pertenece a $\ell_p(v)$. En efecto,

$$\|S^{kn}(y^l)\| \leq \|y\|_{\ell_p(v)} + \left\| \left(\frac{1}{2^{2-(j-l)} f(l)} \frac{v_{j+kn}}{v_j^m} \right)_j \right\|_{\ell_p} \leq \|y\|_{\ell_p(v)} + 4 \sup_j \frac{v_{j+kn}}{v_j^m} < \infty.$$

Consideramos ahora $\tilde{x}^k = \sum_{j=1}^{kn} x_j e_j + \frac{S^{kn}(y^{\log_2(kn)})}{c_k(x)}$. Notamos que $P^k(\tilde{x}) = y^{\log_2(kn)}$ y luego \tilde{x}^k pertenece a J_{P_v} para n suficientemente grande. La prueba concluye si probamos que $\frac{S^{kn}(y^{\log_2(kn)})}{c_k(x)} \rightarrow 0$. Cuando calculamos $\|S^{kn}(y^{\log_2(kn)})\|$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \|S^{kn}(y^{\log_2(kn)})\|_{\ell_p(v)}^p &= \sum_{j=1}^{\log_2(kn)} |y_j|^p v_{j+kn} + \sum_{j=\log_2(kn)}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2-(j-\log_2(kn))} f(\log_2(kn))} \right)^p \frac{v_{j+kn}}{v_j^{pm}} \\
 &\leq \sum_{j=1}^{\log_2(kn)} |y_j|^p v_j \frac{v_{j+kn}}{v_{kn+\log_2(kn)}} \frac{v_{kn+\log_2(kn)}}{v_j} + 4^p \left(\sup_j \frac{v_{j+kn}}{v_j^m} \right)^p \\
 &\leq \|y\|_{\ell_p(v)}^p \left(\sup_j \frac{v_j}{v_{j+1}} \right)^{\log_2(kn)} v_{kn+\log_2(kn)} + 4^p \left(\sup_j \frac{v_{j+kn}}{v_j^m} \right)^p.
 \end{aligned}$$

Como $\alpha \in \ell_1$, $l\alpha(l) \rightarrow 0$ y luego

$$\frac{v_{l+\log_2(l)}}{c_l(x)} = \frac{t^{2^{l+\log_2(l)}\alpha(l)}}{c_l(x)} \leq \frac{t^{2^l\alpha(l)}}{t^{2^l}} \rightarrow 0.$$

Concluimos que $\frac{\|S^{kn}(y^{\log_2(kn)})\|}{c_{kn}(x)} \rightarrow 0$. □

Los siguientes lemas proveen condiciones bajo las cuales las hipótesis del Teorema 2.3.4 son satisfechas.

Lema 2.3.5. *Sea $(v_j)_j$ una sucesión de pesos tal que todo v_j es mayor o igual a uno y hay una constante $K > 0$ con $\alpha(n+1) \leq K\alpha(n)$. Entonces existe m tal que $\sup_j \frac{v_{j+1}}{v_j^m} < \infty$.*

Demostración. Sea $m > K$. Tenemos entonces que $\frac{v_{j+1}}{v_j^m} = t^{2^{j+1}\alpha(j+1)-m2^j\alpha(j)} \leq 1$. □

Lema 2.3.6. *Sea $(v_j)_j$ una sucesión de pesos tal que $\sup_j \frac{v_{j+1}}{v_j^m} < \infty$ para algún $m < 2$. Entonces J_{P_v} es no vacío. En particular esto es válido para pesos de la forma $p(n)^{q(n)}$ donde p, q son polinomios.*

Demostración. Sea C tal que $v_{j+1} \leq Cv_j^m$ para todo j . Argumentando como en la prueba del Teorema 2.3.4 podemos suponer que $v_j \geq 1$ para todo j . Observemos que

$$\alpha(n+1) = \frac{2^{n+1}\alpha(n+1)}{2^{n+1}} = \frac{\log_t(t^{2^{n+1}\alpha(n+1)})}{2^{n+1}} \leq \frac{\log_t(Ct^{m2^n\alpha(n)})}{2^{n+1}} \leq \frac{m}{2}\alpha(n) + \frac{\log_t(C)}{2^{n+1}}.$$

Se sigue por inducción que hay una constante K tal que $\alpha(n) \leq K\left(\frac{m}{2}\right)^n \in \ell_1$. □

El siguiente objetivo es relacionar el conjunto de Julia de $P_v = e'_1 B$ en $\ell_p(v)$ con el conjunto de Julia de $P = e'_1 B$ en ℓ_p . Como necesitamos que los conjuntos de Julia pertenezcan al mismo espacio, trabajaremos con un conjugado de P_v actuando en ℓ_p .

Los operadores coshifts en espacios pesados están ligados a operadores coshift pesados en espacios no pesados: si consideramos los pesos $\omega_n = \left(\frac{v_{n-1}}{v_n}\right)^{\frac{1}{p}}$ y B_ω el operador coshift dado por $[B_\omega(x)]_j = x_{j+1}\omega_{j+1}$ entonces el factor lineal $\Phi: \ell_p(v) \rightarrow \ell_p$, $[\phi(x)]_j = x_j v_j^{\frac{1}{p}}$ es un isomorfismo

lineal. Más aún, es muy simple verificar que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \ell_p(v) & \xrightarrow{B} & \ell_p(v) \\ \downarrow x_n v_n^{\frac{1}{p}} & & \downarrow x_n v_n^{\frac{1}{p}} \\ \ell_p & \xrightarrow{B_\omega} & \ell_p \end{array}$$

De una forma similar resulta que el polinomio $P_v = e'_1 B$ en $\ell_p(v)$ es conjugado al polinomio $P_\omega = e'_1 B_\omega$ in ℓ_p .

Como todo operador coshift pesado es continuo si y sólo si $\sup_j |\omega_j| < \infty$ y para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ todo polinomio homogéneo P se conjuga a λP podemos asumir que $\omega_j < 1$ para todo j .

Dados pesos ω_n consideramos $\Omega = (\Omega_n)_n$ dado por $\Omega_1 = 1$ y para $n > 1$ $\Omega_n = \prod_{j=2}^n \omega_j$. Notemos que $P_\omega^n(x) = c_n(x)c_n(\Omega)B_\omega^n(x)$, donde $c_n(\cdot)$ es definido de la forma usual. En efecto, $P(x) = e'_1(x)B_\omega(x)$ y para $n > 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} P_\omega^n(x) &= P_\omega(c_{n-1}(x)c_{n-1}(\Omega)B_\omega^{n-1}(x)) = c_{n-1}^2(x)c_{n-1}^2(\Omega)e'_1(B_\omega^{n-1}(x))B_\omega^n(x) \\ &= c_{n-1}^2(x)c_{n-1}^2(\Omega)x_n \prod_{j=2}^n \omega_j B_\omega^n(x) = c_n(x)c_n(\Omega)B_\omega^n(x). \end{aligned}$$

Proposición 2.3.7. *Sea ω_j una sucesión de pesos tal que $\|\omega\|_\infty \leq 1$. Entonces el polinomio P_ω tiene conjunto de Julia no vacío si y sólo si hay un t tal que $c_n(\Omega)t^{2^n} \rightarrow \infty$.*

Demostración. Supongamos que el conjunto de Julia es no vacío. Como R_{P_ω} es vacío, hay un $x \in J_{P_\omega}$ con $\|x\|_\infty > 1$ tal que $\|P_\omega^n(x)\| \rightarrow \infty$. Entonces $\|P_\omega^n(x)\| = |c_n(x)||c_n(\Omega)||B_\omega^n(x)| \leq \|x\|_\infty^{2^n} |c_n(\Omega)||B_\omega^n(x)| \leq \|x\|_\infty^{2^n} |c_n(\Omega)|\|x\|$. Concluimos que $\|x\|_\infty^{2^n} |c_n(\Omega)| \rightarrow \infty$.

Consideremos $x = (2, 1, \frac{1}{2}, \dots)$ y recordemos que $c_n(x) = 2^n$. Tomemos t tal que $t^{2^n} c_n(\Omega) \rightarrow \infty$. Luego,

$$\begin{aligned} \|P^n(t^2 x)\| &\geq 2^n t^{2^{n+1}} |c_n(\Omega)||B_\omega^n(x)| \geq t^{2^{n+1}} |c_n(\Omega)||e'_1(B_\omega^n(x))| \\ &\geq t^{2^{n+1}} |c_n(\Omega)|^2 |\Omega_{n+1}| = t^{2^{n+1}} |c_{n+1}(\Omega)| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.3.8. *Sea $(\omega)_j$ una sucesión de pesos tal que $\|\omega\|_\infty \leq 1$ y que $P_\omega = e'_1 \cdot B_\omega$ y $P = e'_1 \cdot B$ con conjunto de Julia J_{P_ω} no vacío. Entonces existe $C > 0$ tal que $J_{P_\omega} \subseteq J_P \subseteq C J_{P_\omega}$. En particular deducimos que si J_{P_ω} es no vacío entonces es δ -denso para algún δ , débil denso y $\Gamma \cdot J_{P_\omega}$ es denso en ℓ_p para todo conjunto Γ tal que 0 es un punto de acumulación de Γ .*

Demostración. Como $\|\omega\|_\infty \leq 1$ tenemos que $\|P_\omega^n(x)\| \leq \|P^n(x)\|$ para todo n . Luego $J_{P_\omega} \subseteq J_P$. Recíprocamente sea t tal que $t^{2^n} c_n(\Omega) \rightarrow \infty$ y $x \in J_P$ tal que $\overline{Orb_P(x)} = J_P$. Si mostramos que $t^4 Orb_P(x) \subseteq J_{P_\omega}$, entonces se sigue que $t^4 J_P \subseteq J_{P_\omega}$. Sea entonces $y \in Orb_P(x)$. Como J_P no tiene puntos aislados, y satisface también que $\overline{Orb_P(y)} = J_P$. Notamos ahora que por el Teorema 2.2.16 $Orb_P(y)$ es débil densa y entonces $|e'_1(P^n(y))| \geq 1$ para infinitos n . En otras palabras $|c_n(y)y_{n+1}| \geq 1$ para infinitos n . Si consideramos uno de esos n , tenemos que

$$\|P_\omega(t^4 y)^n\| = t^{2^{n+2}} |c_n(y)||c_n(\Omega)||B_\omega^n(y)| \geq t^{2^{n+2}} |c_n(\Omega)| |\Omega_{n+1}| \geq t^{2^{n+2}} |c_{n+2}(\Omega)| \rightarrow \infty.$$

Concluimos que $t^4 y \in J_{P_\omega}$. □

Aplicando la Proposición 2.3.8 la prueba del siguiente teorema es simple.

Teorema 2.3.9. *Sea $(v_j)_j$ una sucesión de pesos tal que para algunos m y n la sucesión $(\frac{v_{j+n}}{v_j^m})_j$ es acotada y el conjunto J_{P_v} es no vacío. Entonces todo vector $x_0 \in J_{P_v}$ tal que $\overline{\text{Orb}_{P_v}(x_0)} = J_{P_v}$ satisface al mismo tiempo que*

- I) x_0 es débil hipercíclico;
- II) Existe $\delta > 0$ tal que x_0 es un vector δ -hipercíclico;
- III) x_0 es Γ -supercíclico para todo $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ tal que 0 es un punto de acumulación de Γ .

Más aún, P_v es Γ -supercíclico para todo $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ no acotado.

Demostración. Las conclusiones de i),ii),iii) son inmediatas aplicando la Proposición 2.3.8, el Teorema 2.2.16 y notando que todas las propiedades son invariantes vía conjugación lineal (Proposiciones 2.2.2,2.2.6, y 2.2.9).

Probamos ahora que P_v es Γ -transitivo para todo Γ no acotado.

Argumentando como en la prueba del Teorema 2.3.4 podemos suponer que $v_j \geq 1$ para todo j y que las sucesiones tales que $S^{kn}(y) \in \ell_p$ para todo k son densas en ℓ_p . En efecto, si $y \in \ell_p$ consideramos

$$y^l = \sum_{j=1}^n y_j e_j + \sum_{j=l+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \frac{1}{v_j^m} \quad (2.6)$$

que tiende a y cuando l tiende a infinito. Por otro lado, como $\sup_j \frac{v_{j+kn}}{v_j^m} < \infty$, tenemos que $S^{kn}(y^l)$ está bien definido para todo k .

Sean U, V conjuntos abiertos y $x \in U, y \in V$. Sea $x^k = \sum_{j=1}^k x_j e_j$ y y^k definido como en la ecuación (2.6). Para cada k elegimos $\gamma_k \in \Gamma$ tal que $\|\frac{S^{kn}(y^{kn})}{c_{kn}(x)\gamma_k}\| \rightarrow 0$. Luego, $x^{kn} + \frac{S^{kn}(y^{kn})}{c_{kn}(x)\gamma_k}$ está eventualmente en U mientras que $\gamma_k P_v^{kn}(x^{kn} + \frac{S^{kn}(y^{kn})}{c_{kn}(x)\gamma_k}) = y^{kn}$ esta eventualmente en V . Concluimos que P_v es Γ -transitivo. □

2.3.1. La familia de polinomios $\varphi \cdot B$ en ℓ_p

Enfocamos ahora la atención a la familia de polinomios $P_\varphi = \varphi \cdot B \in \mathcal{P}(\ell_p)$ donde $\varphi : \ell_p \rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal. Para estudiar estos polinomios nos reduciremos, usando una conjugación adecuada, a la familia de polinomios P_v estudiada en la sección anterior.

Notemos primero que $P_\varphi(x)^n = d_n(x)B^n(x)$ donde

$$d_n(x) = d_n(\varphi, x) = \varphi(x)^{2^{n-1}} \cdot \varphi(B(x))^{2^{n-2}} \dots \varphi(B^{n-1}(x)).$$

En efecto, vale para $n = 1$ y si $n > 1$ tenemos que

$$P_\varphi^n(x) = P_\varphi(d_{n-1}(x)B^{n-1}(x)) = d_{n-1}(x)^2 \varphi(B^{n-1}(x))B^n(x) = d_n(x).$$

Para simplificar notación llamaremos φ_j a $B^{*j-1}(\varphi)$. Luego, $d_n(x) = \prod_{l=1}^n \varphi_l(x)^{2^{n-l}}$.

Notemos que $d_n(x)$ depende solamente de los primeros n valores de $\varphi_j(x)$. Sería deseable tener una base predual $\{u_j\}$ se $\{\varphi_j\}$, ya que de esta manera $d_n(x)$ dependería únicamente de las coordenadas de x con respecto a la base $\{u_n\}$. Desafortunadamente $\{\varphi_j\}$ puede no admitir una base predual. Sin embargo, podemos obtener un conjunto predual $\{u_j\}$ tal que $B(u_j) = u_{j-1}$.

Lema 2.3.10. *Sea $\varphi \in \ell_p^*$ tal que $\varphi(e_1) \neq 0$. Entonces existe $(u_n)_n$ tal que*

I) *para todo n , $\text{span}\{u_n : 1 \leq j \leq n\} = \text{span}\{e_n : 1 \leq j \leq n\}$;*

II) *para todo n , $B(u_n) = u_{n-1}$;*

III) *para todos n, j , $\varphi_j(u_n) = \delta_{j,n}$ y*

IV) *hay una constante C tal que para todo n , $\|u_{n-1}\| \leq \|u_n\| \leq C\|u_{n-1}\|$.*

Demostración. Definimos u_1 como $\frac{e_1}{\varphi(e_1)}$. Como $B(e_1) = 0$ se sigue que $\varphi_j(u_1) = 0$ para todo $j > 1$ y por construcción $\varphi_1(u_1) = 1$. Definimos u_n inductivamente como

$$u_n = -\varphi(S(u_{n-1})) \frac{e_1}{\varphi(e_1)} + S(u_{n-1}),$$

donde S es el operador shift. Es inmediato mostrar que $\text{span}\{u_j : j \leq n\} = \text{span}\{e_j : j \leq n\}$ y que $B(u_n) = u_{n-1}$. Probamos por inducción que $\varphi_j(u_n) = \delta_{j,n}$. Supongamos que ya lo sabemos para todo $j < n$.

Si $j > n$ entonces $B^{j-1}(u_n) = 0$ y luego $\varphi_j(u_n) = \varphi B^{j-1}(u_n) = 0$. Si $j = 1$, tenemos que

$$\varphi(u_n) = -\varphi(S(u_{n-1})) \cdot \varphi\left(\frac{e_1}{\varphi(e_1)}\right) + \varphi(S(u_{n-1})) = 0.$$

Finalmente si $1 < j \leq n$ usamos la hipótesis inductiva para obtener

$$\varphi_j(u_n) = \varphi B^{j-1}(u_n) = \varphi(u_{n-j-1}) = \delta_{n-j-1,1} = \delta_{n,j}.$$

Notemos que $\|u_n\| \leq \|u_{n-1}\| \left(\frac{\|\varphi\|}{|\varphi(e_1)|} + 1 \right)$. En efecto,

$$\|u_n\| = \left\| -\varphi(S(u_{n-1})) \cdot \frac{e_1}{\varphi(e_1)} + S(u_{n-1}) \right\| \leq \frac{\|\varphi\| \cdot \|u_{n-1}\|}{|\varphi(e_1)|} + \|u_{n-1}\| \leq \|u_{n-1}\| \left(1 + \frac{\|\varphi\|}{|\varphi(e_1)|} \right).$$

Por otro lado, como $S(u_{n-1})$ tiene primer coordenada 0, tenemos que

$$\|u_n\|^p = \left| \frac{\varphi(S(u_{n-1}))}{\varphi(e_1)} \right|^p + \|S(u_{n-1})\|^p \geq \|u_{n-1}\|^p.$$

□

En el Lema 2.1.6 probamos que el conjunto de Julia es estable vía conjugación lineal. Sin embargo, no podemos en general esperar que (Q, J_Q) es *quasiconjugado* a (P, J_P) sabiendo que (Q, Y) es quasiconjugado a (P, X) . Probamos un caso particular de este fenómeno para los polinomios $P_v = e'_1 B \in \mathcal{P}(^2\ell_p(v))$.

Teorema 2.3.11. *Sea $(v_j)_j$ una sucesión de pesos tal que hay n, m con $\sup_j \frac{v_{j+n}}{v_j^m} < \infty$ y tal que J_{P_v} es no vacío. Sea X un espacio de Banach, $T : X \rightarrow X$ un operador lineal y $\varphi : X \rightarrow C$ tal que ambos $Q := \varphi \cdot T$ y T son quasiconjugados a P_v y B vía un factor lineal común Φ . Entonces (Q, J_Q) es quasiconjugado a (P, J_{P_v}) vía Φ .*

$$\begin{array}{ccc} \ell_p(v) & \xrightarrow{B} & \ell_p(v) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ X & \xrightarrow{T} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \ell_p(v) & \xrightarrow{P_v} & \ell_p(v) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ X & \xrightarrow{\varphi T} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} J_{P_v} & \xrightarrow{P_v} & J_{P_v} \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ J_{\varphi \cdot T} & \xrightarrow{\varphi T} & J_{\varphi \cdot T} \end{array}$$

Demostración. Debemos probar que $\Phi(J_P) \subseteq J_Q$ y que $\Phi(J_{P_v})$ es denso en J_Q .

La primera afirmación es fácil de probar. Tomemos x tal que $Orb_{P_v}(x)$ es densa en J_{P_v} . Es suficiente mostrar que $\Phi(Orb_{P_v}(x)) \subseteq J_Q$. Además, como J_Q es invariante, basta probar que $\Phi(x) \in J_Q$. Por el Teorema 2.3.4, x es un vector débil hipercíclico para P y luego $\Phi(x)$ es un vector débil hipercíclico para Q . Por la Proposición 2.2.6, $\Phi(x)$ pertenece a J_Q .

La segunda afirmación es más difícil de probar. Notemos que $Q^n(x) = d_n(x)T^n(x)$ donde $d_n(x) = \prod_{j=1}^n \varphi(T^j(x))^{2^{n-j}}$. De una forma similar, $d_n(x)$ se puede definir recurrentemente como

$$\begin{cases} d_1(x) = \varphi(x) & \text{si } n = 1 \\ d_n(x) = d_{n-1}(x)^2 \varphi(T^n(x)) & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Dados $a \in \ell_1(v)$ observamos que $c_n(a) = d_n(\Phi(a))$. En efecto, como $\Phi(B(a)) = T\Phi(a)$ tenemos que

$$c_n(a)T^n(\Phi(a)) = \Phi(c_n(a)B^n(a)) = \Phi(P_v^n(a)) = Q^n(\Phi(a)) = d_n(\Phi(a))T^n(\Phi(a)).$$

Tomemos $x \in J_Q$. Afirmamos que podemos suponer que hay un $t > 1$ tal que $d_n(x) \geq t^{2^n}$ para todo n . En efecto, dado $t > 1$ consideramos $tx \in J_Q$ y observamos que $d_n(tx)$ es acotado por abajo. Sea n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ $\frac{\|T\|^n \|x\|}{t^{2^{n-1}}} < r_Q$. Si $d_n(x)$ no fuese acotado por abajo, existiría un $n \geq n_0$ tal que $|d_n(tx)| = t^{2^{n-1}}|d_n(x)| \leq 1$ y luego $\|Q^n(x)\| = |d_n(x)|\|T^n(x)\| \leq \frac{1}{t^{2^{n-1}}}\|T\|^n\|x\| \leq r_Q$. Esto es una contradicción ya que x pertenece a J_Q .

Dados $s > t > 1$ tenemos que hay una constante C de forma que $d_n(sx) \geq (\frac{s}{t})^{2^{n-1}}d_n(tx) \geq (\frac{s}{t})^{2^{n-1}}C$ lo que prueba nuestra afirmación.

Sean entonces $\varepsilon > 0$, $x \in J_Q$ y t tal que $d_n(x) \geq t^{2^n}$ para todo n y consideremos $\alpha(n)$ y β_n las sucesiones inducidas por t y v_n . Por continuidad de d_n hay una sucesión $(a^n)_n \subseteq c_{00}$ tal que $\|\Phi(a^n) - x\| \leq \varepsilon$ y $d_n(\Phi(a^n)) = c_n(a^n) \geq \frac{t^{2^n}}{2}$. Si cada $a^n = \sum_{j=1}^{m_n} a_j^n e_j$, consideramos el vector $\tilde{a}^n \in \ell_1(v)$,

$$\tilde{a}^n = \sum_{j=1}^n a_j^n e_j + \sum_{j=n+1}^{\infty} \text{sign}(a_j^n) \max\{|a_j^n|, \frac{1}{2^{2-(j-n)} f(n) v_j}\} e_j,$$

donde $f(n)$ es cualquier sucesión tendiendo a ∞ tal que $t^{2^{n-1}} \geq f(n)$ para todo n . Afirmamos que \tilde{a}^n pertenece a J_{P_v} para n suficientemente grande. En efecto, como J_{P_v} es completamente invariante es suficiente probar que $P_v^n(\tilde{a}^n)$ pertenece a J_{P_v} . Los módulos de las coordenadas de

$P_v^n(\tilde{a}^n)$ son más grandes que los módulos de las coordenadas del vector $\frac{c_n(a^n)}{f(n)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2-j}v_{j+n}} e_j$. Es suficiente entonces mostrar que $\frac{c_n(a^n)}{f(n)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2-j}v_{j+n}} e_j \in J_{P_v}$. Por el Lemma 2.3.3 esto es cierto si $\frac{c_n(a^n)}{f(n)} > t^{2^{n+1}\beta_n}$. Esto es válido ya que si n es suficientemente grande tal que $\beta_n < \frac{1}{4}$, entonces

$$\frac{c_n(a^n)}{f(n)} \geq t^{2^{n-1}} \geq t^{2^{n-1}4\beta_n} = t^{2^{n+1}\beta_n}.$$

Observemos que, para $n \leq j \leq m_n$,

$$|a_j^n - \tilde{a}_j^n| = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{máx}\{|a_j^n|, \frac{1}{2^{2-(j-n)}f(n)v_j}\} = |a_j^n|; \\ |sign(a_j^n)|a_j^n| - sign(a_j^n)\frac{1}{2^{2-(j-n)}f(n)v_j}| & \text{si } \text{máx}\{|a_j^n|, \frac{1}{2^{2-(j-n)}f(n)v_j}\} = \frac{1}{2^{2-(j-n)}f(n)v_j}. \end{cases}$$

En ambos casos tenemos que $|a_j^n - \tilde{a}_j^n| \leq \frac{1}{2^{2-(j-n)}f(n)v_j}$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \|\Phi(\tilde{a}^n) - x\|_X &\leq \|\Phi(a^n) - x\|_X + \|\Phi\| \|a^n - \tilde{a}^n\|_{\ell_p(v)} \\ &\leq \varepsilon + \|\Phi\| \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |\tilde{a}_j^n|^p v_j \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon + \|\Phi\| \frac{4}{f(n)}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.12. *Sea φ un funcional lineal tal que $\varphi(e_1) \neq 0$. Entonces existe un espacio pesado $\ell_1(v)$ cumpliendo la hipótesis del Teorema 2.3.4 tal que P_φ es quasiconjugado a P_v y tal que $(B, \ell_1(v))$ es quasiconjugado a (B, ℓ_p) vía un factor lineal común Φ .*

$$\begin{array}{ccc} \ell_1(v) & \xrightarrow{B} & \ell_1(v) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ \ell_p & \xrightarrow{B} & \ell_p \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \ell_1(v) & \xrightarrow{P_v} & \ell_1(v) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ \ell_p & \xrightarrow{P_\varphi} & \ell_p \end{array}$$

En particular se deduce gracias al Teorema 2.3.11 que $P_\varphi : J_{P_\varphi} \rightarrow J_{P_\varphi}$ es transitivo y por el Teorema 2.3.9 que hay un vector que es al mismo tiempo débil hipercíclico, Γ -supercíclico para todo conjunto Γ teniendo al cero como punto de acumulación y δ -hipercíclico para algún $\delta > 0$.

Demostración. Sea $(u_n)_n$ la sucesión dada por el Lema 2.3.10. Consideremos $v_n = \|u_n\|$ y $\ell_1(v) = \{(x_n)_n : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|v_n < \infty\}$. Sea $\phi : \ell_1(v) \rightarrow \ell_p$ dada por la extensión lineal de $\phi(a_n e_n) = a_n u_n$. Se sigue por definición de $\ell_1(v)$ que $\|\phi(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n)\|_{\ell_p(v)} \leq \|\phi(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n)\|_{\ell_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \|u_n\| = \|a\|_{\ell_1(v)}$. Notamos además que el operador coshift es continuo en $\ell_1(v)$, porque, por iv) del Lema 2.3.10, $v_j \leq v_{j+1}$ para todo j . Afirmamos que (B, ℓ_p) es cuasiconjugado a $(B, \ell_1(v))$ vía Φ . En efecto,

$$\Phi(B(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} u_n = B(\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n) = B(\Phi(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n)).$$

Sea $P_v = e'_1 \cdot B \in \mathcal{P}(\ell_1(v))$. Usando otra vez iv) deducimos que $(\frac{v_j}{v_{j-1}})_j$ es acotado. Concluimos que se cumple la hipótesis del Lema 2.3.6 y obtenemos que J_{P_v} es no vacío.

Finalmente observamos que

$$\begin{aligned} \Phi(P_v(\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j)) &= \Phi(x_1 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} x_{j+1} e_j) = x_1 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} x_{j+1} u_j \\ &= P_\varphi(\sum_{j=1}^{\infty} x_j u_j) = P_\varphi(\Phi(\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j)). \end{aligned}$$

□

2.4. Existencia de polinomios homogéneos δ -hipercíclicos, débil hipercíclicos y Γ -supercíclicos en espacios de Banach arbitrarios

En esta sección probaremos el Teorema 2.4.4, que establece que en cualquier espacio de Banach separable y de dimensión infinita existe un polinomio homogéneo que es δ -hipercíclico, débil hipercíclico y Γ -supercíclico para todo conjunto $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ que es no acotado o tal que 0 es un punto de acumulación de Γ .

La prueba sigue algunas de las ideas de [2, 31] usadas para probar la existencia de operadores hipercíclicos. Buscaremos un polinomio P actuando en ℓ_1 satisfaciendo las propiedades mencionadas y tal que además para cada espacio de Banach X exista un polinomio homogéneo Q que sea cuasiconjugado a P .

El polinomio P en ℓ_1 será de la forma $e'_1 \cdot B_\omega$, donde B_ω es un coshift pesado. No toda elección de pesos es adecuada, ya que si los pesos son demasiados chicos el conjunto de Julia puede resultar vacío.

El siguiente Teorema es un corolario de los Teoremas 2.3.4 y 2.3.9.

Teorema 2.4.1. *Sean $X = \ell_1$ y P el polinomio homogéneo $P = e'_1 \cdot B_\omega \in \mathcal{P}({}^2\ell_1; \ell_1)$, donde B_ω es el coshift pesado definido como $[B_\omega(x)]_i = \frac{1}{(i+1)^2} x_{i+1}$. Entonces P es débil hipercíclico, δ -hipercíclico y Γ -supercíclico para todo $\Gamma \subset \mathbb{C}$ tal que Γ es no acotado o tal que 0 es un punto de acumulación de Γ .*

Demostración. Nuestro polinomio P es conjugado a $(e'_1 B, \ell_1(v))$, donde $v_n = n!$ y $\Phi : e_n \rightarrow \prod_{j=1}^n j^2 e_n$. Observemos que para todo $m > 1$, $\sup_j \frac{v_{j+1}}{v_j^m} = \sup_j \frac{j+1}{j^{m-1}} < \infty$. Luego por el Lema 2.3.6 su conjunto de Julia es no vacío. Aplicando ahora los Teoremas 2.3.4 y 2.3.9 el Teorema es válido para $(e'_1 B, \ell_1(v))$. Ahora observamos que las propiedades involucradas son invariantes vía isomorfismos. □

Para probar el Teorema de existencia 2.4.4, usaremos el siguiente resultado que fue probado independientemente por Pelczyński y Plichko (see, [59, Theorem 1.27]).

Lema 2.4.2. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita y separable. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe una base de Markushevich $(1 + \varepsilon)$ -acotada. Esto es, existe una sucesión $(x_n, x_n^*)_n \subset X \times X^*$ tal que*

1. $\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X , $\text{span}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ es w^* -denso en X^*
2. $\sup_n \|x_n\| \cdot \|x_n^*\| < 1 + \varepsilon$.
3. $x_n^*(x_k) = \delta_{n,k}$.

Teorema 2.4.3. *Sea $P_\omega \in \mathcal{P}(^m \ell_1; \ell_1)$ el polinomio $e_1' \cdot B_\omega$, con $\omega = (\frac{1}{n^2})_n$ y sea X un espacio de Banach infinito dimensional y separable. Entonces existe $Q \in \mathcal{P}(^2 X; X)$ y $\Phi \in \mathcal{L}(\ell_1; X)$ tal que ambos Q y $Q|_{J_Q}$ son cuasiconjugados a P_ω y $P|_{J_{P_\omega}}$ respectivamente vía el operador lineal Φ .*

Demostración. Sea $(x_n)_n \subseteq X$ y $(x_n^*)_n$ las sucesiones dadas por el Lema de arriba aplicadas a $\varepsilon = 1$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\|x_n\| = 1$ y $\|x_n^*\| \leq 2$. Sea $Q \in \mathcal{P}(^2 X; X)$ definido como

$$Q(x) := x_1^*(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}^*(x)x_n}{n^2}.$$

El polinomio está bien definido porque $\|Q(x)\| \leq 2 \sum_n \frac{1}{n^2} \|x\|^2$.

Sea $\Phi : \ell_1 \rightarrow X$ definido como $\Phi((a_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Nuevamente, como $\|x_n\| = 1$, el operador está bien definido. Notemos también que Φ tiene rango denso. Esto se debe a que $\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está contenido en la imagen de Φ .

Veamos ahora que $T(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1}^*(X) \frac{x_n}{n^2}$ es cuasiconjugado a B_ω vía Φ y que P_ω es conjugado a Q vía el mismo factor Φ . Aplicando el Teorema 2.3.11 esto implica que $Q|_{J_Q}$ es cuasiconjugado a $P_\omega|_{J_{P_\omega}}$.

Sea $a \in \ell_1$. Tenemos que

$$\Phi(P(a)) = \Phi(a_1 B_\omega(a)) = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} x_n}{n^2};$$

mientras

$$\begin{aligned} Q(\Phi(a)) &= Q\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = x_1^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1}^*(a_{n+1} x_{n+1}) \frac{x_n}{n^2} \\ &= a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} x_n}{n^2}. \end{aligned}$$

Similarmente resulta que

$$\Phi\left(B\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \frac{x_n}{n^2} = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x_n}{n^2}\right) = T(\Phi(a)).$$

□

Teorema 2.4.4. *Sea X un espacio de Banach separable y de dimensión infinita, entonces existe un polinomio homogéneo que es al mismo tiempo débil hipercíclico, δ -hipercíclico y Γ -supercíclico para todo $\Gamma \subset \mathbb{C}$ que es no acotado o tal que 0 es punto de acumulación de Γ .*

Demostración. Por el Teorema 2.4.3 existe $Q \in \mathcal{P}(^2X; X)$ que es cuasiconjugado a $P = e'_1 \cdot B_\omega$ vía un factor lineal Φ , con $\omega = (\frac{1}{n^2})_n$. Este polinomio es, por el Teorema 2.4.1 débil hipercíclico, δ -hipercíclico y Γ -supercíclico para todo Γ no acotado y tal que 0 es punto de acumulación de Γ . Como Φ es un operador lineal, se sigue de las Proposiciones 2.2.2, 2.2.6 y 2.2.9 que Q satisface las propiedades requeridas. \square

2.4.1. Comentarios finales

Bonet y Peris [31] siguieron una idea similar para probar que todo espacio de Fréchet infinito dimensional y separable admite un operador lineal hipercíclico. Ellos usaron de hecho una generalización del Lema 2.4.2 para espacios de Fréchet.

Lema 2.4.5 (Bonet y Péris). *Sea X un espacio de Fréchet de dimensión infinita y separable no isomorfo a $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Entonces existen $x_n \in X$, $x_n^* \in X^*$ y $0 < \alpha_n < 1$, $\alpha_n \rightarrow 0$ tal que*

- I) $\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X y
- II) $x_n^*(x_m) = \alpha_n \delta_{n,m}$.

Sin embargo este lema no provee una estimación asintótica del comportamiento de α_n . Ésto no fue un problema para ellos ya que $Id + B_\omega$ es hipercíclico en ℓ_1 independientemente del peso elegido, pero si replicamos los argumentos de arriba y consideramos $\omega_n = \frac{1}{n^2} \alpha_n$ y $P(x) = e'_1(x)B_\omega(x)$ entonces J_P puede llegar a ser vacío.

Capítulo 3

Polinomios homogéneos hipercíclicos en $H(\mathbb{C})$

El espacio $H(\mathbb{C})$ ha sido una fuente histórica de ejemplos y resulta deseable exhibir un ejemplo concreto de un polinomio homogéneo hipercíclico en $H(\mathbb{C})$. En este capítulo probaremos que el polinomio $P(f) = f(0)f(z+1)$ es mixing, caótico y frecuentemente hipercíclico. Este ejemplo es además el primer ejemplo de un polinomio homogéneo frecuentemente hipercíclico.

Por otro lado, mostramos la no hiperciclicidad de varios candidatos naturales a ser polinomios homogéneos hipercíclicos.

Los contenidos de este capítulo están basados en el trabajo [35].

3.1. Un polinomio homogéneo hipercíclico en $H(\mathbb{C})$

En esta sección probamos el Teorema 3.1.1, el resultado principal del capítulo, el cual establece que hay un polinomio homogéneo muy natural que es hipercíclico en $H(\mathbb{C})$. Este polinomio es además caótico y frecuentemente hipercíclico.

Trabajaremos con polinomios homogéneos en el espacio $H(\mathbb{C})$ de funciones enteras, el cual mirado con la topología compacto abierta es un espacio de Fréchet space. Las seminormas

$$\|f\|_K := \sup_{z \in K} |f(z)|,$$

donde K es un conjunto compacto, definen la topología de $H(\mathbb{C})$. Luego, los conjuntos

$$U_{\varepsilon, f, R} = \{h \in H(\mathbb{C}) : \|h - f\|_{B(0, R)} < \varepsilon\},$$

con $\varepsilon, R > 0$ forman una base de abiertos de $f \in H(\mathbb{C})$.

El espacio $H(\mathbb{C})$ se puede ver como un espacio de sucesiones. Podemos identificar $f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{z^j}{j!}$ con $(a_n)_n$. Con esta identificación las seminormas dadas por

$$\|f\|_k = \sup_j f^{(j)}(0) \frac{k^j}{j!} = \sup_j a_j \frac{k^j}{j!}$$

definen la topología de $H(\mathbb{C})$ y, como $H(\mathbb{C})$ es nuclear, las seminormas también

$$\|f\|_k = \|a_j \cdot \frac{k^j}{j!}\|_p$$

definen la topología de $H(\mathbb{C})$ (ver por ejemplo [74, Example 27.27] o [77]).

El Teorema principal del capítulo es el siguiente.

Teorema 3.1.1. *El polinomio $P \in \mathcal{P}^2 H(\mathbb{C})$ definido como*

$$P(f)(z) = f(0) \cdot f(z + 1)$$

es mixing, caótico y frecuentemente hipercíclico.

En una forma similar al polinomio $e'_1 B$ estudiado en el capítulo anterior (ver ecuación (2.5)), tenemos que $P^n(f)(z) = c_n(f)f(z + n)$ donde

$$c_n(f) = f(0)^{2^{n-1}} \cdot f(1)^{2^{n-2}} \cdot \dots \cdot f(n-1). \quad (3.1)$$

Análogamente c_n cumple las relaciones de recurrencia

$$c_n = \begin{cases} f(0) & \text{if } n = 1; \\ c_n(f)^2 f(n-1) & \text{if } n > 1. \end{cases}$$

Prueba de que P es mixing

Sean U y V conjuntos abiertos. Podemos suponer que $U = U_{\varepsilon, f, R}$ and $V = U_{\varepsilon, g, R}$. Además podemos suponer que $R \notin \mathbb{N}$ y que tanto f como g no tienen ceros en \mathbb{Z} .

Por el Teorema de Runge podemos encontrar, para n suficientemente grande, un polinomio p tal que $p \in U$ y $p(\cdot + n) \in V$. Afirmamos que una aplicación más cuidadosa del Teorema de Runge nos permite encontrar un polinomio p tal que además p cumple $c_n(p) \sim 1$.

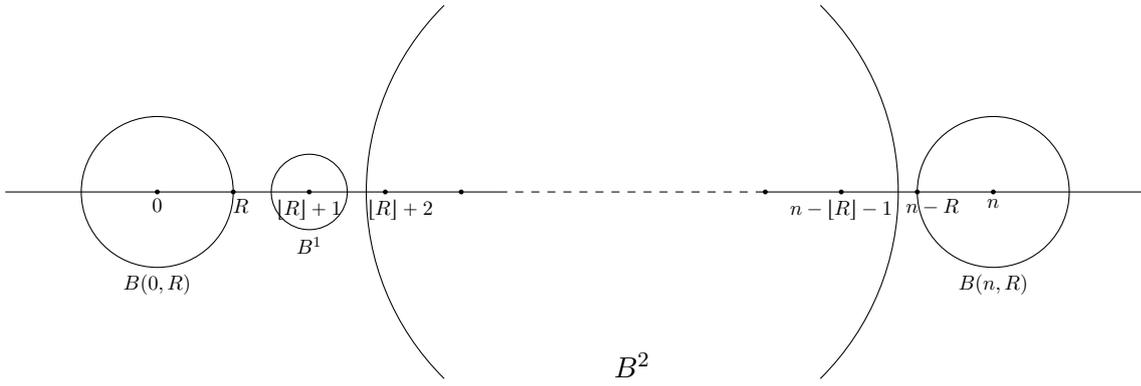
Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 2R + 2$, y fijemos $n \geq n_0$. Esto implica que $B(0, R) \cap B(n, R) = \emptyset$ y que podemos definir bolas abiertas $B^1, B^2 \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\{B(0, R), B^1, B^2, B(n, R)\}$ son disjuntos dos a dos y tal que $[R] + 1 \in B^1$, y $[R] + 2, \dots, n - [R] - 1 \in B^2$, donde $[R]$ denota la parte entera de R . Ver **Fig. 3.1**.

Definamos $\tilde{g}(z) = g(z - n)$ y α cualquier $2^{n-[R]-2}$ -raíz del número

$$f(0)^{2^{n-1}} \cdot \dots \cdot f([R])^{2^{n-[R]-1}} \cdot 1^{2^{n-[R]-3}} \cdot \dots \cdot 1^{2^{[R]}} \cdot \tilde{g}(n - [R])^{2^{[R]-1}} \cdot \dots \cdot \tilde{g}(n - 1).$$

También consideramos los conjuntos abiertos perturbados en $H(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} U_k &= \left\{ h \in H(\mathbb{C}) : \|f - h\|_{B(0, R)} < \frac{\varepsilon}{k} \right\}, \\ \tilde{V}_k &= \left\{ h \in H(\mathbb{C}) : \|\tilde{g} - h\|_{B(n, R)} < \frac{\varepsilon}{k} \right\}, \\ W_k^1 &= \left\{ h \in H(\mathbb{C}) : \sup_{z \in B^1} \left| h(z) - \frac{1}{\alpha} \right| < \frac{1}{k} \right\} \text{ and} \\ W_k^2 &= \left\{ h \in H(\mathbb{C}) : \sup_{z \in B^2} |h(z) - 1| < \frac{1}{k} \right\}. \end{aligned}$$


 Figura 3.1: Los conjuntos abiertos $B(0, R)$, B^1 , B^2 y $B(n, R)$.

Por el Teorema de Runge podemos encontrar, para cada k , un polinomio p_k en $U_k \cap W_k^1 \cap W_k^2 \cap \tilde{V}_k$. Observemos que para $j \in \mathbb{N}$, tenemos

$$p_k(j) \rightarrow \begin{cases} f(j) & \text{if } j \leq [R]; \\ \frac{1}{\alpha} & \text{if } j = [R] + 1; \\ 1 & \text{if } [R] + 1 < j \leq n - [R] - 1; \\ \tilde{g}(j) & \text{if } n - [R] - 1 < j \leq n - 1, \end{cases}$$

cuando $k \rightarrow \infty$. Por la definición de α , tenemos también que $c_n(p_k) \rightarrow 1$ cuando $k \rightarrow \infty$. Entonces, para k grande vale que

$$\|c_n(p_k)p_k - \tilde{g}\|_{B(n,R)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + |c_n(p_k) - 1| \|p_k\|_{B(n,R)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + |c_n(p_k) - 1| \left(\frac{\varepsilon}{2} + \|\tilde{g}\|_{B(n,R)} \right) < \varepsilon.$$

Concluimos que podemos encontrar un polinomio p_k con

$$\|f - p_k\|_{B(0,R)} < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|g - P^n(p_k)\|_{B(0,R)} = \|\tilde{g} - c_n(p_k)p_k\|_{B(n,R)} < \varepsilon.$$

Esto prueba que P es mixing.

Prueba de que P es caótico

Observemos que un vector periódico para P es una función cuasiperiódica, esto es, hay un $\alpha \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(z + n) = \alpha f(z)$. Si esto sucede, la homogeneidad de P fuerza a

$$\left(\frac{1}{c_n(f)\alpha} \right)^{\frac{1}{2^n - 1}} f \tag{3.2}$$

ser un vector n -periódico para P . Notemos también que si f es periódico para P , entonces λf no es necesariamente periódico para P .

Es sabido que el conjunto de funciones periódicas es denso en $H(\mathbb{C})$. Para probar que P es caótico vamos a mostrar que el conjunto de funciones periódicas que cumplen que $\left(\frac{1}{c_n(f)} \right)^{\frac{1}{2^n - 1}} \sim 1$

es también denso en $H(\mathbb{C})$. Nos resulta útil entonces tener una buena caracterización de las funciones periódicas. Sea un segmento infinito L , comenzando en cero, tal que $L \cap \mathbb{T}$ no es una raíz de la unidad y $\theta = \frac{\arg(L)}{2\pi} \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, y definimos $\Omega = \mathbb{C} - L$ (y luego un rama del logaritmo puede ser definida en Ω). Entonces, como la imagen de cualquier banda $(n(\theta+k), n(1+\theta+k)) \times i\mathbb{R}$ vía $e^{\frac{2\pi i}{n}z}$ está contenida en Ω , tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.1.2. *Si una función entera f es n -periódica entonces existe g holomorfa en Ω tal que*

$$f(z) = g(e^{\frac{2\pi i}{n}z})$$

para todo z perteneciente a cualquier banda de la forma $(n(\theta+k), n(1+\theta+k)) \times i\mathbb{R}$. Recíprocamente, si $f(z) = g(e^{\frac{2\pi i}{n}z})$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces f es n -periódica.

Comenzamos ahora con la prueba de la caoticidad de P .

Sea $U = \{h \in H(\mathbb{C}) : \|h - g\|_{B(0,R)} < \varepsilon\}$ un abierto no vacío de $H(\mathbb{C})$ con $R \notin \mathbb{N}$. Nuestro objetivo es encontrar, para algún $n \in \mathbb{N}$, una función n -periódica $f \in U$ tal que también $c_n(f)^{\frac{-1}{2^n-1}} f \in U$. Por (3.2), esto implica que $c_n(f)^{\frac{-1}{2^n-1}} f$ es un vector periódico para P y luego, el conjunto de vectores periódicos es denso en $H(\mathbb{C})$.

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 4R$. Como las funciones periódicas con periodo más grande que n_0 son densas en $H(\mathbb{C})$ [5, Sublemma 7], existe, para algún $n > n_0$, una función n -periódica f con $\|f - g\|_{B(0,R)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Podemos suponer que $f(j) \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

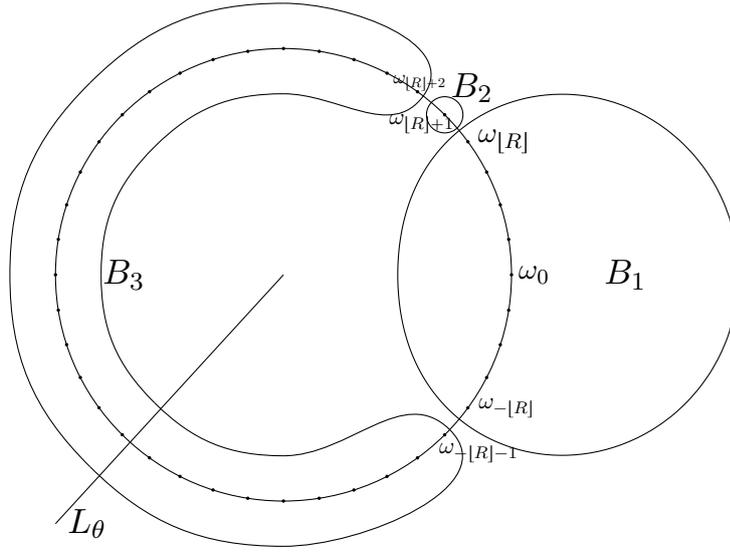
Tomemos ahora $k \in \mathbb{Z}$ tal que $B(0, R)$ está contenida en la banda $(\theta + k, n + \theta + k) \times i\mathbb{R}$. Entonces, por el lema anterior, $f(z) = h(e^{\frac{2\pi iz}{n}})$ para todo $z \in B(0, R)$ para una función holomorfa h en Ω . En vez de aplicar el Teorema de Runge a la función f se lo aplicaremos a h . La función $e^{\frac{2\pi iz}{n}}$ mapea \mathbb{N}_0 a G_n , las raíces enésimas de la unidad, a las cuales denotaremos $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$. Luego, $h(\omega_j) \neq 0$ para todo $\omega_j \in G_n$ y tenemos que

$$P^n(h \circ e^{\frac{2\pi iz}{n}}) = \tilde{c}_n(h) \cdot h \circ e^{\frac{2\pi iz}{n}},$$

donde $\tilde{c}_n(h) := h(\omega_0)^{2^{n-1}} \dots h(\omega_{n-1}) = c_n(h \circ e^{\frac{2\pi iz}{n}})$. Consideremos $B_1 = \{e^{\frac{2\pi iz}{n}} : z \in B(0, R)\}$ y observemos que $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{[R]}$, y $\omega_{n-[R]}, \dots, \omega_{n-1}$ están en B mientras que $\omega_{[R]+1}, \dots, \omega_{n-[R]-1}$ están en $(\overline{B_1})^c$. También, como $n > 4R$ y $\theta \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, tenemos que $B_1 \subseteq \Omega$ y que h es holomorfa en B_1 . El Teorema de Runge nos permite encontrar \tilde{h} tal que \tilde{h} está cerca de h en B_1 y al mismo tiempo $\tilde{c}_n(\tilde{h})$ está cerca de 1. En efecto, tomamos B_2 y B_3 conjuntos abiertos tal que $\omega_{[R]+1} \in B_2$, $\omega_{[R]+2}, \dots, \omega_{n-[R]-1}$ están en B_3 y B_1, B_2, B_3 son disjuntos dos a dos. Ver **Fig. 3.2**.

Definimos ahora U_1^l, U_2^l, U_3^l conjuntos abiertos en $H(\mathbb{C})$ como

$$\begin{aligned} U_1^l &= \left\{ g \in H(\mathbb{C}) : \|g - h\|_{B_1} < \frac{\varepsilon}{l} \right\}, \\ U_2^l &= \left\{ g \in H(\mathbb{C}) : \sup_{z \in B_2} \left| g(z) - \frac{1}{\alpha} \right| < \frac{\varepsilon}{l} \right\}, \\ U_3^l &= \left\{ g \in H(\mathbb{C}) : \sup_{z \in B_3} |g(z) - 1| < \frac{\varepsilon}{l} \right\}; \end{aligned}$$


 Figura 3.2: Los conjuntos B_1 , B_2 , B_3 , L_θ y G_n .

donde α es una $2^{n-[R]-2}$ -raíz del número

$$h(\omega_0)^{2^{n-1}} \cdot \dots \cdot h(\omega_{[R]})^{2^{n-[R]-1}} \cdot 1^{2^{n-[R]-3}} \cdot \dots \cdot 1^{2^{[R]}} \cdot h(\omega_{n-[R]})^{2^{[R]-1}} \cdot \dots \cdot h(\omega_n).$$

Por el Teorema de Runge podemos encontrar, para todo l , un polinomio $h_l \in U_1^l \cap U_2^l \cap U_3^l$. Por la elección de h_l y α , $\tilde{c}_n(h^l) \rightarrow 1$ y $\|h_l - h\|_{B_1} \rightarrow 0$ cuando l tiende a infinito. Luego,

$$\|c_n(h_l \circ e^{\frac{2\pi iz}{n}})^{\frac{-1}{2^{n-1}}} h_l \circ e^{\frac{2\pi iz}{n}} - f\|_{B(0,R)} = \|\tilde{c}_n(h_l)^{\frac{-1}{2^{n-1}}} h_l \circ e^{\frac{2\pi iz}{n}} - h \circ e^{\frac{2\pi iz}{n}}\|_{B(0,R)} \rightarrow 0.$$

Tenemos entonces que para l suficientemente grande, $c_n(h_l \circ e^{\frac{2\pi iz}{n}})^{\frac{-1}{2^{n-1}}} h_l \circ e^{\frac{2\pi iz}{n}} \in U$. Finalmente por el Lema 3.1.2, $h_l \circ e^{\frac{2\pi iz}{n}}$ es n -periódico y por (3.2) $c_n(h_l \circ e^{\frac{2\pi iz}{n}})^{\frac{-1}{2^{n-1}}} h_l \circ e^{\frac{2\pi iz}{n}}$ es un vector periódico para P .

Prueba de que P es frecuentemente hipercíclico

Para probar la existencia de vectores frecuentemente hipercíclicos usaremos el siguiente resultado [32, Lemma 2.5].

Lema 3.1.3. *Existen subconjuntos disjuntos dos a dos $A_{n,m}$ de los números naturales, cada uno de ellos con densidad inferior positiva y tal que para cualquier $k \in A_{n,m}$, $k' \in A_{n',m'}$ vale que $k > m$, y $|k - k'| > m + m'$ si $k \neq k'$.*

Probaremos ahora que P admite vectores frecuentemente hipercíclicos. Nuestra prueba sigue el Ejemplo 9.6 en [58] junto a una aplicación cuidadosa del Teorema de Runge.

Sean $A_{n,m}$ los subconjuntos dados por el lema anterior y consideremos $(k_j)_j \subseteq \mathbb{N}$ la sucesión creciente formada por $\bigcup A_{n,m}$. Si $k_j \in A_{n,m}$ definimos $B_j = B(k_j, r_j)$, donde $r_j = \frac{m}{2} + \frac{1}{m}$ es un radio no natural. Deducimos por el anterior lema que los B_j son disjuntos dos a dos. Sea $(p_n)_n$ una sucesión densa en $H(\mathbb{C})$ tal que $p_n(l) \neq 0$ para todo $l \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Aplicando el Teorema de Runge recursivamente encontraremos $(f_j)_j \subseteq H(\mathbb{C})$ tal que f_j aproxima a $\tilde{p}_j(z) := p_n(z - k_j)$ en B_j , donde n es el único número natural tal que $k_j \in A_{n,m}$, tal que $c_{k_j}(f)$ está cerca de 1, y tal que $f_j(l) \neq 0$ para todo $l \in \mathbb{Z}$. Para lograr esto, sea $(\varepsilon_j)_j \in \ell_1$ una sucesión de números positivos tal que $\varepsilon_j < \frac{1}{m}$ si $k_j \in A_{n,m}$. Definiremos inductivamente una sucesión de funciones enteras y una sucesión de números positivos $(\delta_j)_j$ que cumplan

- (a) $\|f_{j+1} - f_j\|_{B(0, k_j + \frac{1}{k_j})} < \delta_j$,
- (b) $\|c_{k_{j+1}}(f_{j+1})f_{j+1} - \tilde{p}_{j+1}\|_{B_{j+1}} < \delta_j$,
- (c) $\delta_{j+1} < \min\{\varepsilon_{j+1}, \varepsilon_{j+2}/2, \gamma_{j+1}\}$,
- (d) $\delta_{j+1} < \gamma_{l_0} - \sum_{l=l_0}^j \delta_l$, para $l_0 = 1, \dots, j$ y
- (e) f_{j+1} no tiene ceros en \mathbb{Z} ,

donde γ_j es un número positivo que depende de f_j como sigue. Para cualquier $g \in H(\mathbb{C})$ y $j \in \mathbb{N}$, sea $\Phi_j : \mathbb{C}^{k_j} \rightarrow \mathbb{C}$ definido como

$$\Phi_j(x_0, \dots, x_{k_j-1}) := x_0^{2^{k_j-1}} \cdot \dots \cdot x_{k_j-1}.$$

Luego, si tomamos

$$K_{g,j} = \sup_{|z| < k_{j+1}} |g(z)|,$$

tenemos que Φ_j es uniformemente continua en el producto de los discos cerrados $\prod_{l=1}^{k_j} \overline{B(0, K_{g,j} + \|\varepsilon\|_1)} \subset \mathbb{C}^{k_j}$ y que

$$c_{k_j}(g) = \Phi_j(x_{g,j}),$$

donde $x_{g,j}$ es el vector $(g(0), \dots, g(k_j - 1))$. Como Φ_j es uniformemente continua, dado el número $\frac{\varepsilon_j}{2(K_{g,j} + \|\varepsilon\|_1)} > 0$ existe $\gamma_{g,j} > 0$ tal que para todos $x, y \in \overline{B(0, K_{g,j} + \|\varepsilon\|_1)} \times \dots \times \overline{B(0, K_{g,j} + \|\varepsilon\|_1)}$ tenemos que

$$\text{if } \|x - y\|_\infty < \gamma_{g,j} \text{ then } |\Phi_j(x) - \Phi_j(y)| < \frac{\varepsilon_j}{2(K_{g,j} + \|\varepsilon\|_1)}. \quad (3.3)$$

Una vez fijada f_j , γ_j será definido como $\gamma_j := \gamma_{f_j, j}$.

Comenzamos definiendo $f_1(z) = \tilde{p}_1(z)$ (luego hemos definido $\gamma_1 := \gamma_{f_1, 1}$). Tomamos $\delta_1 > 0$ de modo que

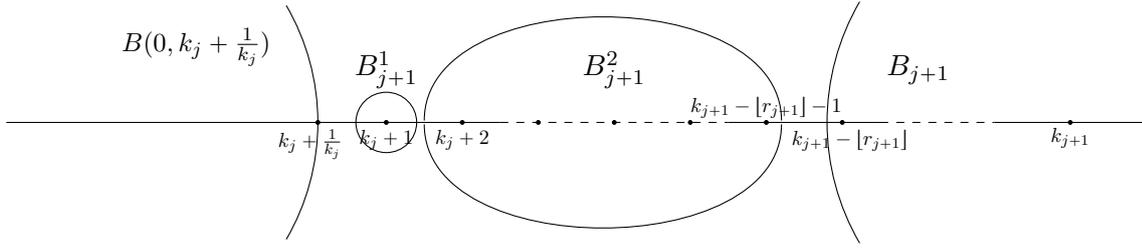
$$\delta_1 < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2/2, \gamma_1\}.$$

Supongamos ahora que hemos contruido $f_1, \dots, f_j \in H(\mathbb{C})$ y $\delta_1, \dots, \delta_j \in \mathbb{R}_{>0}$ satisfaciendo (a)-(e). Vamos a definir ahora f_{j+1} y δ_{j+1} .

Consideremos B_{j+1}^1 y B_{j+1}^2 abiertos disjuntos tal que $k_j + 1 \in B_{j+1}^1$, $\{k_j + 2, \dots, k_{j+1} - [r_{j+1}] - 1\} \subseteq B_{j+1}^2$, y tal que $\{|z| < k_j + \frac{1}{k_j}\}, B_{j+1}^1, B_{j+1}^2, B_{j+1}$ son disjuntos. See **Fig. 3.3**.

Aplicando el Teorema de Runge podemos encontrar funciones enteras g_l cumpliendo

$$(i) \|g_l - f_j\|_{B(0, k_j + \frac{1}{k_j})} < \frac{\varepsilon_j}{l},$$


 Figura 3.3: Los conjuntos abiertos $B(0, k_j + \frac{1}{k_j})$, B_{j+1}^1 , B_{j+1}^2 y B_{j+1} .

- (ii) $\sup_{z \in B_{j+1}^1} |g_l(z) - d_j| < \frac{\varepsilon_j}{l}$,
- (iii) $\sup_{z \in B_{j+1}^2} |g_l(z) - 1| < \frac{\varepsilon_j}{l}$,
- (iv) $\|g_l - \tilde{p}_{j+1}\|_{B_{j+1}} < \frac{\varepsilon_j}{l}$ y
- (v) g_l no tiene ceros en \mathbb{Z} ;

donde $1/d_j$ es una raíz $2^{k_{j+1}-k_j-2}$ -ésima del número

$$f_j(0)^{2^{k_{j+1}-1}} \cdots f_j(k_j)^{2^{k_{j+1}-k_j-1}} \cdot 1^{2^{k_{j+1}-k_j-3}} \cdots 1^{2^{|r_{j+1}|}} \cdot \tilde{p}_{j+1}(k_{j+1}-[r_{j+1}])^{2^{|r_{j+1}|-1}} \cdots \tilde{p}_{j+1}(k_{j+1}-1),$$

de modo que $c_{k_{j+1}}(g_l)$ tiende a 1 cuando $l \rightarrow \infty$. Tomemos ahora l suficientemente grande tal que $\frac{\varepsilon_{j+1}}{l} < \delta_j$ y tal que

$$\begin{aligned} \|c_{k_{j+1}}(g_l)g_l - \tilde{p}_{j+1}\|_{B_{j+1}} &\leq |c_{k_{j+1}}(g_l) - 1| \cdot \|g_l\|_{B_{j+1}} + \|g_l - \tilde{p}_{j+1}\|_{B_{j+1}} \\ &\leq |c_{k_{j+1}}(g_l) - 1| \cdot \left(\|\tilde{p}_{j+1}\|_{B_{j+1}} + \frac{\varepsilon_j}{l} \right) + \frac{\varepsilon_j}{l} < \delta_j. \end{aligned}$$

Para tal l tomamos $f_{j+1} := g_l$. Observemos que el número $\gamma_{j+1} > 0$ queda determinado. Finalmente tomamos $\delta_{j+1} > 0$ tal que

$$\delta_{j+1} < \min \left\{ \varepsilon_{j+1}, \frac{\varepsilon_{j+2}}{2}, \gamma_{j+1}, \gamma_j - \delta_j, \gamma_{j-1} - \delta_j - \delta_{j-1}, \dots, \gamma_1 - \sum_{l=1}^j \delta_l \right\}.$$

Esto concluye la construcción de $(f_j)_j$ y $(\delta_j)_j$ satisfaciendo (a)-(e).

Definimos ahora f como

$$f := f_1 + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{j+1} - f_j).$$

Notemos que (d) implica que

$$\sum_{n \geq j} \delta_n \leq \gamma_j,$$

y en particular, la sucesión $(\delta_j)_j \in \ell_1$. Luego, (a) y el hecho de que $k_j + \frac{1}{k_j} \rightarrow \infty$ implican que f es una función entera y que $f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j$. Más aún,

$$c_{k_j}(f) = \Phi(x_{f,j}),$$

donde $x_{f,j} = \left(f_j(0) + \sum_{n \geq j} (f_{n+1}(0) - f_n(0)), \dots, f_j(k_j - 1) + \sum_{n \geq j} (f_{n+1}(k_j - 1) - f_n(k_j - 1)) \right)$. Además, por (a) y (c), los vectores $x_{f,j}$ y $x_{f_j,j}$ pertenecen a $\overline{B(0, K_{f_j,j} + \|\varepsilon\|_1)} \times \dots \times \overline{B(0, K_{f_j,j} + \|\varepsilon\|_1)}$ y como

$$\|x_{f,j} - x_{f_j,j}\|_\infty \leq \sup_{|z| < k_j - 1} \left| \sum_{n \geq j} f_{n+1}(z) - f_n(z) \right| \leq \sum_{n \geq j} \delta_n \leq \gamma_j,$$

por (3.3) obtenemos

$$|c_{k_j}(f) - c_{k_j}(f_j)| = |\Phi_j(x_{f,j}) - \Phi_j(x_{f_j,j})| \leq \frac{\varepsilon_j}{2(K_j + \|\varepsilon\|_1)}. \quad (3.4)$$

Sea $z \in B_j$, entonces usando (a),(b),(c),(3.4),

$$\begin{aligned} |c_{k_j}(f)f(z) - p_n(z - k_j)| &\leq |c_{k_j}(f_j)f(z) - p_n(z - k_j)| + |(c_{k_j}(f) - c_{k_j}(f_j))f(z)| \\ &\leq \delta_{j-1} + \frac{\varepsilon_j}{2(K_j + \|\varepsilon\|_1)}|f(z)| \\ &\leq \frac{\varepsilon_j}{2} + \frac{\varepsilon_j}{2(K_j + \|\varepsilon\|_1)}(|f_j(z)| + \sum_{n \geq j} |f_{n+1}(z) - f_n(z)|) \\ &\leq \frac{\varepsilon_j}{2} + \frac{\varepsilon_j}{2(K_j + \|\varepsilon\|_1)}(K_j + \sum_{n \geq j} \varepsilon_n) \leq \varepsilon_j. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $k_j \in A_{n,m}$ tenemos que,

$$\sup_{|z| < \frac{m}{2} + \frac{1}{m}} |P^{k_j}f(z) - p_n(z)| = \sup_{z \in B_j - k_j} |P^{k_j}f(z) - p_n(z)| = \sup_{z \in B_j} |c_{k_j}(f)f(z) - p_n(z - k_j)| \leq \varepsilon_j < \frac{1}{m}.$$

Notemos que los conjuntos

$$U_{n,m} := \left\{ h \in H(\mathbb{C}) : \sup_{|z| < \frac{m}{2} + \frac{1}{m}} |h(z) - p_n(z)| < \frac{1}{m} \right\},$$

con $n, m \in \mathbb{N}$, forman una base de abiertos de $H(\mathbb{C})$. Finalmente como para $k \in A_{n,m}$, $P^k(f) \in U_{n,m}$ y cada $A_{n,m}$ tiene densidad inferior positiva, concluimos que f es un vector frecuentemente hipercíclico para P .

3.2. Ejemplos de polinomios no hipercíclicos en $H(\mathbb{C})$

El propósito de esta sección es mostrar como muchos polinomios naturales en $H(\mathbb{C})$ fallan en ser hipercíclicos. En vista de los resultados probados en la sección anterior, y el hecho de que la dinámica de los operadores traslación y diferenciación en $H(\mathbb{C})$ comparten muchas propiedades, un candidato natural a ser hipercíclico es el polinomio homogéneo $P(f) := f(0) \cdot f'$. Otra motivación favorable viene del estudio de los operadores bilineales en $H(\mathbb{C})$. Bès y Conejero consideraron en [24, Section 4] el operador bilineal $M(f, g) = f(0)g'$, y mostraron que es hipercíclico (en el sentido definido por los autores, ver también el Teorema 4.1.4 en el siguiente capítulo donde se muestra una prueba alternativa de este hecho). Como $M(f, f) = P(f)$ es razonable esperar que P sea también hipercíclico. Sorprendentemente el polinomio falla en ser hipercíclico.

Proposición 3.2.1. *El polinomio homogéneo $P(f) := f(0)f'(z)$ no es hipercíclico.*

Demostración. Las iteraciones de una función f son de la forma $P^n(f) = c_n(f)f^{(n)}$, con

$$c_n(f) = f(0)^{2^{n-1}} f'(0)^{2^{n-2}} \dots f^{(n-1)}(0).$$

Este hecho puede ser fácilmente probado por inducción. También $c_n(f)$ puede ser definido por las relaciones de recurrencias

$$\begin{cases} c_1(f) = f(0); \\ c_n(f) = c_{n-1}(f)^2 f^{(n-1)}(0). \end{cases}$$

Definamos $X \subseteq H(\mathbb{C})$ como $X := \{f \in H(\mathbb{C}) : \limsup |c_n(f)(n!)^2 R^n| = \infty, \text{ para algún } R > 1\}$, el cual jugará el rol de conjunto de Julia. La prueba será dividida en tres partes:

1. X es P -invariante.
2. 0 no está en la clausura de X .
3. Si $f \notin X$ entonces f no es un vector hipercíclico de P .

Si probamos (1), (2) y (3) entonces se deduce que P no es hipercíclico.

Prueba de (1). Notemos que $c_{k+1}(f) = f(0)c_k(P(f))$. Tomemos $f \in X$ y sea $R > 1$ tal que $\limsup |c_n(f)(n!)^2 R^n| = \infty$. Entonces $Pf \in X$, porque

$$\limsup |c_n(Pf)(n!)^2 (R+1)^n| = \limsup |c_{n+1}(f)((n+1)!)^2 R^{n+1} \frac{(R+1)^n}{f(0)(n+1)^2 R^{n+1}}| = \infty.$$

Prueba de (2). Supongamos que $(f_k)_k \subseteq X$ es una sucesión que tiende a cero. Como c_n es continua, existe una sucesión $(k_n)_n \subseteq \mathbb{N}$ con $|c_n(f_{k_n})| < \frac{1}{2^{2^n}}$. Tomando una subsucesión, podemos suponer que

$$|c_n(f_n)| < \frac{1}{2^{2^n}}.$$

Afirmamos que para cada n , existen $j \geq 0$ tal que $|f_n^{(j+n)}(0)| > (j+n)^{j+n}$. En efecto, si $|f_n^{(j+n)}(0)| \leq (j+n)^{j+n}$ para todo $j \geq 0$ entonces probamos por inducción que $|c_{j+n}(f_n)| < \frac{1}{2^{2^{n+\frac{j}{2}}}}$ para todo $j \geq 0$. Ya lo sabemos para $j = 0$. Supongamos que vale para j . Notemos que para todo par n, j , tenemos que

$$\frac{2^{(n+j) \log_2(n+j)}}{2^{(\sqrt{2}-1)2^{n+\frac{1+j}{2}}}} \leq 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |c_{n+j+1}(f_n)| &= |c_{n+j}^2(f_n)| |f_n^{(j+n)}(0)| \leq \frac{1}{2^{2^{n+1+\frac{j}{2}}}} |f_n^{(j+n)}(0)| \\ &\leq \frac{1}{2^{2^{n+1+\frac{j}{2}}}} 2^{(n+j) \log_2(n+j)} \\ &= \frac{2^{(n+j) \log_2(n+j)}}{2^{2^{n+\frac{j}{2}+\frac{1}{2}}}} \leq \frac{1}{2^{2^{n+\frac{j+1}{2}}}}. \end{aligned}$$

Esto implica que f_n no está en X , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $|f_n^{(j+n)}(0)| > (j+n)^{j+n}$ para algún $j \geq 0$. Recordemos que las seminormas dadas por

$$\|f\|_k = \sup_j |f^{(j)}(0)| \frac{k^j}{j!},$$

definen la topología de $H(\mathbb{C})$ (ver por ejemplo [74, Example 27.27] o [77]).

Para cada n , sea $j_n \geq 0$ tal que $|f_n^{(j_n+n)}(0)| > (j_n+n)^{j_n+n}$. Luego,

$$\|f_n\|_k = \sup_j |f_n^{(j)}(0)| \frac{k^j}{j!} > |f_n^{(j_n+n)}(0)| \frac{k^{j_n+n}}{(n+j_n)!} > 1.$$

Esto contradice el hecho de que $f_n \rightarrow 0$.

Prueba de (3). Supongamos que $|c_n(f)(n!)^2| \leq L < \infty$ para todo $n \geq 0$. Luego, aplicando las desigualdades de Cauchy, tenemos que para algunos $M, r > 0$,

$$|\delta_0(P^{n+1}f)| = |c_{n+1}(f)f^{(n+1)}(0)| \leq \frac{L}{(n!)^2} \frac{M(n+1)!}{r^{n+1}} \rightarrow 0.$$

Por lo tanto f no es un vector hipercíclico. □

A pesar de no ser hipercíclico el polinomio $P(f) = f(0)f'$ tiene dinámica interesante. En efecto, es cuasiconjugado al polinomio $Q = e'_1B \in \mathcal{P}({}^2\ell_1)$, estudiado en el capítulo anterior.

Proposición 3.2.2. *El polinomio $P(f) = f(0)f'(z)$, $P \in \mathcal{P}({}^2H(\mathbb{C}))$ es cuasiconjugado al polinomio $Q(f) := e'_1B$, $Q \in \mathcal{P}({}^2\ell_1)$ vía el morfismo $\Phi(\sum_{j=1}^{\infty} x_{j+1}e_j) = \sum_{j=0}^{\infty} x_{j+1} \frac{z^j}{j!}$.*

$$\begin{array}{ccc} \ell_1 & \xrightarrow{e'_1B} & \ell_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\delta_0D} & H(\mathbb{C}) \end{array}$$

Demostración. Probamos primero que Φ está bien definida. En efecto, $\|\sum_{j=0}^{\infty} x_j \frac{z^j}{j!}\|_k \leq \|x\|_1 \sum_{j=0}^{\infty} 1 \cdot \frac{k^j}{j!} = \|x\|_1 \|e^z\|_k$.

Si $x \in \ell_1$ tenemos que $\Phi(e'_1B)(x) = \Phi\left(x_1 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} x_{j+1}e_j\right) = x_1 \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} x_{j+2} \frac{z^j}{j!}\right) = \delta_0 \cdot D\left(\sum_{j=0}^{\infty} x_{j+1} \frac{z^j}{j!}\right) = \delta_0D(\Phi(x))$. □

No hemos definido aún la noción de δ -densidad para espacios de Fréchet. Dadas las seminormas ρ_n induciendo la topología de X diremos que un polinomio P es δ -hipercíclico si existe una sucesión δ_n y $x \in X$ tal que para cada ρ_n e $y \in X$ existe un j tal que $\rho_n(P^j(x) - y) < \delta_n$.

Aplicando el Teorema 2.2.16 obtenemos el siguiente teorema.

Corolario 3.2.3. *Sea $P \in \mathcal{P}({}^2H(\mathbb{C}))$, $P(f) = f(0) \cdot f'$. Entonces existe $f \in H(\mathbb{C})$ tal que f es un vector débil hipercíclico, Γ -supercíclico para todo Γ tal que 0 es punto de acumulación de Γ y δ -hipercíclico para alguna sucesión $(\delta_n)_n$. Más aún el polinomio es Γ -supercíclico para todo Γ no acotado.*

Aron y Miralles [6] probaron que el polinomio $P \in \mathcal{P}({}^2C^k(\mathbb{R}))$ definido como $P(f)(z) = f(z+1)^2$ es hipercíclico. Sin embargo, si consideramos la aplicación análoga, pero en $H(\mathbb{C})$, entonces el polinomio falla rotundamente en ser hipercíclico. La rigidez de las funciones holomorfas obstruye nuestra búsqueda de polinomios homogéneos hipercíclicos. En particular, el teorema de Hurwitz impone restricciones a este tipo de problema. Ésto ya fue notado en [4], cuando los autores buscaban álgebras de vectores hipercíclicos.

Proposición 3.2.4. *Sean $a, b \in \mathbb{C}$ y $P \in \mathcal{P}({}^2H(\mathbb{C}))$ el polinomio definido como*

$$P(g)(z) = g(z+a)g(z+b).$$

Si f es un punto de acumulación de una órbita de P entonces ó bien f es idénticamente nula ó $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. En particular, P no es hipercíclico.

Demostración. Notemos que si $g \in H(\mathbb{C})$, entonces

$$P^k(g)(z) = \prod_{j=0}^k g(z + ja + (k-j)b) \binom{k}{j}. \quad (3.5)$$

Sea $f \in H(\mathbb{C})$ y supongamos que f tiene un cero de orden $m \geq 1$ en z_0 . Si $P^{k_l}(g)$ converge uniformemente a f en $B(z_0, 2(|a| + |b|))$, tenemos por el Teorema de Hurwitz's que, para cada radio suficientemente chico $\delta > 0$, hay un l_0 tal que para cada $l \geq l_0$ la cantidad de ceros de $P^{k_l}(g)$ en $B(z_0, \delta)$ es m . Luego, para cada $l \geq l_0$ hay un $j_l \leq k_l$ tal que $g(\cdot + j_l a + (k_l - j_l)b)$ tiene un cero de orden positivo en $B(z_0, \delta)$. Pero esto implica que, por (3.5), que $P^{k_l}(g)$ tiene que tener otro cero de orden $\geq k_l$ en $B(z_0 + a - b, \delta)$ (o en $B(z_0 - a + b, \delta)$ si $j_l = k_l$), y luego f tiene que ser idénticamente nula. \square

Contrariamente fue probado en [4] que el operador de diferenciación admite un álgebra de vectores hipercíclicos. Sin embargo, el Teorema de Hurwitz también impide que potencias del operador diferenciación sean hipercíclicos.

Proposición 3.2.5. *Sea $P \in \mathcal{P}({}^2H(\mathbb{C}))$ uno de los siguientes polinomios*

$$(i) \quad P(g)(z) = g'(z)^2,$$

$$(ii) \quad P(g)(z) = g(z)g'(z).$$

Entonces, P no es hipercíclico.

Demostración. Solo probamos (i), ya que la demostración de (ii) es análoga. Notemos que si $g'(z_0) = 0$ entonces $(P(g))'(z_0) = 0$. Supongamos que $P^{n_k}(g) \rightarrow z^2$. Entonces $P^{n_k}(g)' \rightarrow 2z$. Por el Teorema de Hurwitz, existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$, $P^{n_k}(g)'$ tiene un cero de orden 1 en $B(0, 1)$. Luego $P^n(g)'$ tiene un cero de orden al menos 1 en $B(0, 1)$ para todo $n \geq n_{k_0}$. Concluimos que g no es hipercíclico para P . \square

Capítulo 4

Operadores multilineales hipercíclicos en espacios de Banach

Como una extensión natural de la teoría de los polinomios homogéneos uno puede considerar órbitas de operadores multilineales. Al considerar la órbita inducida por un operador multilineal surge un primer problema: ¿Cuál es la noción correcta de órbita? Mientras que el n -estado de una aplicación continua f es la n -ésima composición de su estado inicial, no podemos componer canónicamente a M ni siquiera una vez, ya que $M : X \times X \dots X \rightarrow X$.

Los primeros en estudiar este problema fueron Grosse-Erdmann y Kim [56] y, para evitar las limitaciones impuestas por la bola límite, definieron la órbita inducida por un operador bilineal de la mayor forma posible. Recordemos su definición. Dados X un espacio de Banach y vectores $x, y \in X$ la órbita inducida por un operador bilineal $M \in \mathcal{L}({}^2X; X)$ con condiciones iniciales (x, y) es $\cup_{n \geq 0} M^n$ donde los n -estados $M^n(x, y)$ son inductivamente definidos como $M^0(x, y) = \{x, y\}$ y $M^n(x, y) = M^{n-1}(x, y) \cup \{M(z, w) : z, w \in M^{n-1}\}$. Un operador bilineal se dice *bihiper-cíclico* si existe una órbita densa en X . Con esta definición la noción de bola límite sigue presente. Si ambos x, y pertenecen a $\frac{1}{\|M\|} B_X$ entonces toda la órbita tiende a cero. En [56], algunos resultados sobre operadores bihipercíclicos fueron obtenidos. Por ejemplo, el conjunto de vectores bihipercíclicos es G_δ pero nunca residual. Además los autores lograron producir operadores bilineales (no necesariamente simétricos) bihipercíclicos en espacios de Banach arbitrarios (incluso en el caso finito dimensional). Sin embargo, no se sabe si el operador puede ser tomado simétrico y la siguiente pregunta fue propuesta. (ver [56, p. 708]).

Pregunta A. *Sea X un espacio de Banach separable. ¿Existe un operador bilineal simétrico en $\mathcal{L}({}^2X)$?*

La definición de órbita inducida por un operador multilineal no es canónica y otras interpretaciones son posibles. Mientras que el estado n -ésimo de las iteraciones de un operador lineal depende únicamente del paso anterior ($x_n = T(x_{n-1})$), sería deseable que el n -ésimo estado de un operador m -lineal dependa de los m -pasos anteriores. Bès y Conejero [24] definieron la órbita inducida por un operador multilineal M con condiciones iniciales x_{1-m}, \dots, x_0 como $Orb_M(x_{1-m}, \dots, x_0) = \cup_n \{x_n\}$, donde cada x_n se define inductivamente como $x_n = M(x_{n-m}, \dots, x_{n-1})$. Un operador

multilineal se dice hipercíclico si existen $x_{1-m}, \dots, x_0 \in X$ tal que $Orb_M(x_{1-m}, \dots, x_0)$ es denso en X . Como la órbita en el sentido de Bés y Conejero está contenida en la órbita en el sentido de Grosse-Erdmann y Kim se sigue que un operador bilineal hipercíclico es bihipercíclico. Esta contención implica que también en este caso hay una noción de bola límite para espacios de Banach, si m vectores consecutivos pertenecen a $\frac{1}{\|M\|^{m-1}}B_X$, entonces la órbita tiende a cero y luego el conjunto de vectores hipercíclicos no es residual. En [24] fueron obtenidos ejemplos de operadores multilineales en espacios de Fréchet no normables, incluyendo $H(\mathbb{C})$ y $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. También fue probado que todo espacio de Banach, de dimensión infinita y separable, admite un operador multilineal supercíclico (i.e. $\overline{COrb_M(x_{1-m}, \dots, x_0)} = X$). Sin embargo, no se conocen ejemplos de operadores multilineales en espacios de Banach ni operadores multilineales hipercíclicos sin conjunto de vectores hipercíclicos residual. Las siguientes preguntas fueron propuestas en [24, Section 5].

Pregunta B. *Sea X un espacio de Fréchet y M un operador multilineal hipercíclico. Es el conjunto de vectores hipercíclicos residual?*

Pregunta C *¿Existen operadores multilineales hipercíclicos en espacios de Banach?*

Por supuesto una respuesta positiva a la pregunta B implica una respuesta negativa a la C.

La estructura del capítulo es la siguiente. En la Sección 4.1 proponemos una noción de transitividad para operadores multilineales y analizamos ejemplos de operadores multilineales hipercíclicos en espacios de Fréchet no normables con y sin conjunto de vectores hipercíclicos residuales. En particular respondemos la Pregunta B mostrando un operador multilineal hipercíclico sin conjunto residual de vectores hipercíclicos. En la Sección 4.2 respondemos la Pregunta C de forma positiva. Más aún, construimos operadores multilineales hipercíclicos en espacios de Banach arbitrarios. En la sección 4.3 estudiamos el operador bilineal $e'_1(x)B_\omega(y) + e'_1(y)B(x)$, que es la simetrización del polinomios $e'_1 \cdot B_\omega$ estudiado en el Capítulo 2. Usando la teoría de los conjuntos de Julia probamos que en todo espacio de Banach separable y de dimensión infinita existen operadores bilineales simétricos bihipercíclicos

El contenido de este capítulo está basado en el trabajo [34].

4.1. Operadores multilineales hipercíclicos en espacios de Fréchet no normables

La órbita de un operador m -lineal M con condiciones iniciales (x_{1-m}, \dots, x_0) fue definido en [24] como el conjunto

$$Orb_M(x_{1-m}, \dots, x_0) = \cup_{n \geq 1-m} \{x_n\},$$

donde cada x_n se define inductivamente como $x_n := M(x_{n+1-m}, \dots, x_n)$. El operador m -lineal se dice *hipercíclico* (en el sentido de Bès-Conejero [24]) si existe una m -tupla $(x_{1-m}, \dots, x_0) \in X^m$ tal que la órbita m -lineal de M con condiciones iniciales (x_{1-m}, \dots, x_0) es densa en X . En este caso decimos que (x_{1-m}, \dots, x_0) es un vector hipercíclico de M .

Una familia de funciones $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, $f_n : X \rightarrow Y$, se dice universal si existe $x \in X$ tal que la órbita $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en Y . Además, la familia se dice transitiva si para todo par de abiertos $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$, existe n tal que $f_n(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, si definimos inductivamente

$$\begin{aligned} M^1(x_{1-m}, \dots, x_0) &= M(x_{1-m}, \dots, x_0), \\ &\vdots \\ M^m(x_{1-m}, \dots, x_0) &= M(x_0, M^1(x_{1-m}, \dots, x_0), \dots, M^{m-1}(x_{1-m}, \dots, x_0)), \\ M^n(x_{1-m}, \dots, x_0) &= M(M^{n-m}(x_{1-m}, \dots, x_0), \dots, M^{n-1}(x_{1-m}, \dots, x_0)), \quad \text{for } n > m; \end{aligned}$$

tenemos por definición que un operador M m -lineal es hipercíclico si y sólo si la familia $\{M^n : n \in \mathbb{N}\}$, $M^n : \overbrace{X \times \dots \times X}^m \rightarrow X$ es universal. Como los vectores universales de una familia universal son G_δ se sigue que el conjunto de vectores hipercíclicos de un operador multilineal es G_δ .

Es bien sabido (ver [55]) que si X es un espacio métrico separable e Y es separable, entonces una familia es transitiva si y sólo si es universal y los vectores universales son residuales. Luego, si la familia $\{M^n\}$ es transitiva entonces M resulta hipercíclica con conjunto de vectores hipercíclicos residual. Esto nos permite dar una noción de transitividad para un operador m -lineal M .

Definición 4.1.1. *Un operador m -lineal M se dice fuertemente transitivo si la familia $\{M^n\}$ es transitiva. Equivalentemente, M es hipercíclico con conjunto de vectores hipercíclicos residual.*

Luego, la Pregunta B puede ser reformulada de la siguiente manera:

Sea X un espacio de Fréchet y M un operador m -lineal hipercíclico. Es necesariamente M fuertemente transitivo?

Notemos que si X es un espacio de Banach, entonces ningún operador m -lineal es fuertemente hipercíclico. En efecto, de la misma forma que ocurre para polinomios homogéneos y para operadores bilineales bihipercíclicos [56], es posible definir una noción de bola límite: si $x_{1-m}, \dots, x_0 \in \frac{1}{\|M\|^{m-1}} B_X$ entonces la órbita $Orb_M\{x_{1-m}, \dots, x_0\}$ está contenida en $\frac{1}{\|M\|^{m-1}} B_X$, más aún la órbita es una sucesión que converge a cero. Luego, el conjunto de vectores hipercíclicos no es denso en X^m y en consecuencia el operador no es fuertemente transitivo.

En [24] fue probado que el operador multilineal $M = e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_1 \otimes B$ es hipercíclico en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, donde $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es el espacio de sucesiones complejas con sistema fundamental de seminormas $\|a\|_k = \max_{j \leq k} |a_j|$ y B es el operador coshift. Además los autores probaron que el conjunto de vectores hipercíclicos es residual, luego se sigue que M es fuertemente transitivo. Seguiremos otra aproximación la cual creemos más simple. Probaremos que M es fuertemente transitivo.

Proposición 4.1.2. *Sea $M \in \mathcal{L}^m(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, $M(x_{1-m}, \dots, x_0) = [x_{1-m}]_1 \dots [x_{-1}]_1 B(x_0)$. Entonces M es fuertemente transitivo.*

Demostración. Las iteraciones de un vector (x_{1-m}, \dots, x_0) son de la forma

$$M^n(x_{1-m}, \dots, x_0) = c_n(x_{1-m}, \dots, x_0)B^n(x_0),$$

donde $c_n(x_{1-m}, \dots, x_0)$ es una función continua que depende únicamente en $[x_{1-m}]_1, \dots, [x_{-1}]_1$ y en las $n - 1$ primeras coordenadas de x_0 . Aplicando un argumento inductivo se sigue que los pesos c_n satisfacen la relación recursiva $c_{m+j+1} = c_{j+1} \cdots c_{j+m} [x_0]_{j+2} \cdots [x_0]_{j+m}$.

Sean U_{1-m}, \dots, U_0 conjuntos abiertos. Como la familia de conjuntos $B_{\epsilon, k, x} = \{y : \|x - y\|_k < \epsilon\}$ es una base de conjuntos abiertos para la topología de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, podemos suponer que $B_{\epsilon, k, w} \subseteq U_0$ para algún $k > m$, $w \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Vamos a mostrar que $M^k(U_{1-m}, \dots, U_0)$ es $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Para $i < m$ sea $x_{i-m} \in U_{i-m}$ tal que $[x_{i-m}]_1 \neq 0$ y $x_0 \in B_{\epsilon, k, w}$ cumpliendo además que $[x_0]_j \neq 0$ si $1 \leq j \leq k$. Sean $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y S el operador shift. Tenemos que $x_0 + \frac{S^k(z)}{c_k(x_{1-m}, \dots, x_0)} \in U_0$ y como c_n lee únicamente las primeras coordenadas de x_{1-m}, \dots, x_{-1} y las primeras $n - 1$ coordenadas de x_0 ,

$$M^k \left(x_{1-m}, \dots, x_{-1}, x_0 + \frac{S^k(z)}{c_k(x_{1-m}, \dots, x_0)} \right) = c_k(x_{1-m}, \dots, x_0) B^k \left(x_0 + \frac{S^k(z)}{c_k(x_{1-m}, \dots, x_0)} \right) = z.$$

□

Recordemos que la órbita inducida por un polinomio homogéneo $P(y) = \varphi(y)T(y)$, donde φ es un funcional lineal y T es un operador lineal es de la forma $c_n(y)T^n(y)$, (ver 2.5) donde

$$c_n(y) = \varphi(y)^{2^{n-1}} \dots \varphi(T^{n-1}(y)).$$

La órbita inducida por un operador bilineal $M(x, y) \rightarrow \varphi(x) \cdot T(y)$ es levemente distinta de la órbita inducida por P . En este caso obtenemos que $M^n(x, y) = c_n(x, y)T^n(y)$, donde

$$c_n(x, y) = \varphi(x)^{F_n} \varphi(y)^{F_{n-1}} \dots \varphi(T^{n-2}(y))^{F_1},$$

y F_n es la sucesión de Fibonacci:

$$F_n := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En efecto, $M(x, y) = \varphi(x)T(y)$, $M^2(x, y) = M(y, \varphi(x)T(y)) = \varphi(x)\varphi(y)T^2(y)$ y si $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} M^n(x, y) &= M(c_{n-2}(x, y)T^{n-2}(y), c_{n-1}(x, y)T^{n-1}(y)) \varphi(c_{n-2}(x, y)T^{n-2}(y)) c_{n-1}(x, y)T^{n-1}(y) \\ &= c_{n-1}(x, y)c_{n-2}(x, y) \cdot T^{n-2}(y) = c_n(x, y)T^{n-2}(y). \end{aligned}$$

A pesar de que el comportamiento asintótico de $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ y $\frac{2^n}{2^{n-1}}$ parecen ser similares, la diferencia más importante es que el valor $\varphi(T^{n-1})(y)$ no aparece en el producto de $c_n(x, y)$. Esta consideración va a jugar un rol importante para probar el Teorema 4.1.4.

Adaptando las técnicas desarrolladas en el capítulo anterior para probar que el polinomio $P(f) = f(0)f(\cdot + 1)$ es hipercíclico en $H(\mathbb{C})$ probaremos que el operador bilineal $M(f, g) = f(0)g(\cdot + 1)$ es fuertemente transitivo en $H(\mathbb{C})$.

Teorema 4.1.3. *El operador bilineal $B \in \mathcal{L}^2(H(\mathbb{C}))$ definido como $B(g, f)(z) = g(0)f(z + 1)$ es fuertemente transitivo.*

Demostración. Recordemos que $B^n(g, f) = c_n(g, f)f(z + n)$, donde

$$c_n(g, f) = g(0)^{F_n} f(0)^{F_{n-1}} \dots f(n-2)$$

y F_n es la sucesión de Fibonacci clásica. Sean U_1, U_2, V conjuntos abiertos no vacíos. Podemos suponer que

$$\begin{aligned} U_1 &= \{h \in H(\mathbb{C}) : \|h - f_1\|_{B(0,R)} < \epsilon\}, \\ U_2 &= \{h \in H(\mathbb{C}) : \|h - f_2\|_{B(0,R)} < \epsilon\}, \\ V &= \{h \in H(\mathbb{C}) : \|h - g\|_{B(0,R)} < \epsilon\}; \end{aligned}$$

donde $R > 2$, R no es un número natural y g, f_1, f_2 no tienen ceros en los números enteros. Vamos a probar que $B^{2n_0}(f_1, h) \in V$, para algún $h \in U_2$, donde $n_0 = \lfloor R \rfloor + 1$. Notemos que $R < n_0 < 2n_0 - R < n_0 + 1$. Luego, n_0 es el único número natural tal que $\{k \in \mathbb{N} : R < k < 2n_0 - R\}$, y $[0, 2n_0] \cap \mathbb{N} \subseteq [0, R] \cup \{n_0\} \cup [2n_0 - R, 2n_0]$.

Consideramos ahora para cada $l \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} U_2^l &= \{h \in H(\mathbb{C}) : |h(z) - f_2(z)| < \frac{\epsilon}{l} \text{ para todo } z \in B(0, R)\} \\ V^l &= \{h \in H(\mathbb{C}) : |h(z) - g(z - 2n_0)| < \frac{\epsilon}{l} \text{ para todo } z \in B(2n_0, R)\}, \\ W^l &= \{h \in H(\mathbb{C}) : |h(z) - \alpha| < \frac{\epsilon}{l} \text{ para todo } z \in B(n_0, \delta)\}, \end{aligned}$$

donde δ es lo suficientemente chico tal que $B(0, R), B(2n_0, R), B(n_0, \delta)$ son disjuntos dos a dos y $\frac{1}{\alpha}$ es cualquier raíz F_{n_0-1} -ésima del número

$$f_1(0)^{F_{2n_0}} f_2(0)^{F_{2n_0-1}} f_2(1)^{F_{2n_0-2}} \dots f_2(n_0 - 1)^{F_{n_0}} g(-n_0 + 1)^{F_{n_0-2}} \dots g(-2)^{F_1}.$$

Por el Teorema de Runge existe, para cada l , una función $h_l \in U_2^l \cap V^l \cap W^l$. Por lo tanto, $\|h_l - f_2\|_{B(0,R)} \rightarrow 0$, $\|h_l - \tau_{-2n_0}g\|_{B(2n_0,R)} \rightarrow 0$ y $\|h_l - \alpha\|_{B(n_0,\delta)} \rightarrow 0$, as $l \rightarrow \infty$. Notemos que, por la elección de α , $c_{2n_0}(f_1, h_l) \rightarrow 1$. Luego tenemos que,

$$\begin{aligned} \|c_{2n_0}(f_1, h_l)h_l - \tau_{-2n_0}g\|_{B(2n_0,R)} &\leq |c_{2n_0}(f_1, h_l) - 1| \cdot \|h_l\|_{B(2n_0,R)} + \|h_l - \tau_{-2n_0}g\|_{B(2n_0,R)} \\ &\leq |c_{2n_0}(f_1, h_l) - 1| \cdot \|h_l - \tau_{-2n_0}g\|_{B(2n_0,R)} \\ &\quad + |c_{2n_0}(f_1, h_l) - 1| \cdot \|\tau_{-2n_0}g\|_{B(2n_0,R)} + \frac{\epsilon}{l} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que para l suficientemente grande,

$$\|c_{2n_0}(f_1, h_l)h_l - \tau_{-2n_0}g\|_{B(2n_0, R)} < \epsilon$$

o equivalentemente $B^{2n_0}(f_1, h_l) \in V$. Como $f_1 \in U_1$ y $h_l \in U_2$, concluimos que B es un operador multilineal hipercíclico. \square

En [24] fue probado que el operador bilineal $M \in \mathcal{L}^2(H(\mathbb{C}))$, $M(f, g) = f(0)g'$ es hipercíclico (notar que, en contraste, el polinomio homogéneo asociado $f \mapsto f'(0)f$ no es hipercíclico, ver Teorema 3.2.1). Aquí presentamos otra prueba la cual creemos más sencilla. Probamos además que el operador no es fuertemente transitivo y luego el conjunto de vectores hipercíclicos no es residual. Esto responde la Pregunta B. La prueba explota el hecho de que el valor $g^{(n-2)}(0)$ no aparece en el producto de la definición de $c_n(f, g)$.

Teorema 4.1.4. *Sea $M(f, g) = f(0)g'(z)$. Entonces M es hipercíclico y no fuertemente transitivo.*

Demostración. Recordemos que $M^n(f, g)(z) = c_n(f, g)g^{(n)}(z)$, donde

$$c_n(f, g) = f(0)^{F_n} g(0)^{F_{n-1}} \dots \cdot g^{(n-2)}(0)^{F_1}$$

y $(F_n)_n$ es la sucesión de Fibonacci clásica. Los pesos c_n satisfacen además las relaciones recursivas

$$\begin{cases} c_1(f, g) = f(0); \\ c_2(f, g) = f(0)g(0); \\ c_{n+1}(f, g) = c_n(f, g)c_{n-1}(f, g)g^{(n-2)}(0). \end{cases}$$

Vamos a exhibir un vector universal del tipo $(1, f)$. Vamos a escribir entonces $c_n(f)$ en vez de $c_n(1, f)$. La idea es construir una función Q tal que para alguna sucesión $(n_j)_j$, $M^{n_j}(1, Q) = Q^{(n_j)}$ (i.e. $c_{n_j}(Q) = 1$) y tal que $Q^{(n_j)} - p_j \rightarrow 0$ para una sucesión densa apropiada de polinomios $\{p_j\}_j$.

Para $\lambda \in \mathbb{C}$, sea $\lambda^{\frac{1}{n}}$ la raíz n -ésima de λ cuyo argumento es $\frac{\arg(\lambda)}{n}$, de forma que $\lambda^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ para todo λ .

Dado un polinomio $p(z) = \sum_{l=0}^n a_l \frac{z^l}{l!}$ vamos a considerar su primitiva usual $I(p) := \sum_{l=1}^{n+1} a_{l-1} \frac{z^l}{l!}$.

Sea $\{p_n\}_n$ una sucesión densa de polinomios de modo que si $p_n(z) = \sum_{i=0}^n a_{i,n} z^i$ entonces se cumple que para $0 \leq i \leq n$ $\frac{1}{n} \leq |a_{i,n}| \leq n$ y que $a_{i,n} = 0$ si $i > n$.

Vamos a construir nuestra función universal de forma inductiva. El primer paso es simple. Sea $n_1 = 3$. Definimos Q_1 como $\alpha_1 + a_{0,1}z + a_{1,1} \frac{z^2}{2!} + \beta_1 \frac{z^3}{3!}$, donde α_1 y β_1 son números complejos tal que los pesos $c_4(Q_1)$ y $c_5(Q_1)$ son ambos uno. Como $|a_{0,1}| = |a_{1,1}| = 1$ se sigue que $|\alpha_1| = |\beta_1| = 1$.

Paso 2: Para un número grande n_2 a ser determinado consideramos los únicos números complejos α_2 y β_2 tal que $Q_2 = Q_1 + \alpha_2 \frac{z^4}{4!} + I^5 p_2 + \sum_{l=8}^{n_2-1} 1 \frac{z^l}{l!} + \beta_2 \frac{z^{n_2}}{n_2!}$ satisfacen que $c_{n_2+1}(Q_2)$ y $c_{n_2+2}(Q_2)$ son iguales a uno.

Afirmamos que si $C > 0$ tal que

$$j^{\frac{F_{k+1}-1}{F_k}} \leq C2^j \text{ para todo } j, k, \quad (4.1)$$

entonces $\alpha_2 < C2^{n_1+1}$ y, para n_2 suficientemente grande, $\beta_2 < C2^{n_2}$. Para esto notemos que, como $c_5(Q_2)$ y $c_4(Q_2)$ son ambos iguales a uno, entonces $M^5(1, Q_2) = Q_2^{(5)} = M(1, Q_2^{(4)})$ y $M^6(1, Q_2) = Q_2^{(4)}(0)Q_2^{(6)} = M^2(1, Q_2^{(4)})$, y luego $c_n(Q_2) = c_{n-4}(Q_2^{(4)})$ para todo $n > 0$. Por lo tanto, si tomamos $k = n_2 - 4$, tenemos que $c_{n_2}(Q_2) = c_k \left(\alpha_2 + I(p_2) + \sum_{l=4}^{k-1} 1 \frac{z^l}{l!} + \beta_2 \frac{z^k}{k!} \right)$. Ahora $c_{k+1}(Q_2^{(4)}) = c_{n_2-4+1}(Q_2^{(4)}) = c_{n_2+1}(Q_2) = 1$ y entonces

$$\alpha_2^{F_k} \cdot a_{0,2}^{F_{k-1}} \cdot \dots \cdot a_{2,2}^{F_{k-3}} \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1.$$

Si definimos $\Gamma_{2,k}$ como el número $|a_{0,2}|^{F_{k-1}} \cdot \dots \cdot |a_{2,2}|^{F_{k-3}}$ esto implica que $\alpha_2 = \Gamma_{2,k}^{-\frac{1}{F_k}}$. Usando que $\frac{1}{2} \leq |a_{i,2}| \leq 2$ y que $\sum_{l=1}^N F_j = F_{N+2} - 1$, tenemos que $|\alpha_2| \leq \prod_{l=1}^{k-1} 2^{\frac{F_l}{F_k}} = 2^{\frac{F_{k+1}-1}{F_k}} \leq C2^2 = C2^{n_1+1}$.

Miramos ahora la condición $c_{k+2}(Q_2^{(4)}) = 1$ para obtener

$$\alpha_2^{F_{k+1}} \cdot a_{0,2}^{F_k} \cdot \dots \cdot a_{2,2}^{F_{k-2}} \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot \beta_2 = 1.$$

Luego

$$|\beta_2| = \Gamma_{2,k}^{\frac{F_{k+1}}{F_k}} \cdot \frac{1}{\Gamma_{2,k+1}}.$$

Calculamos este número usando la identidad de Vajda's, [91, Appendix (20a)]

$$F_{N+i}F_{N+j} - F_N F_{N+i+j} = (-1)^N F_i F_j.$$

Aplicando la fórmula de arriba para cada $N = k - l - 1$, $i = 1$ y $j = l + 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} |\beta_2| &= \Gamma_{2,k}^{\frac{F_{k+1}}{F_k}} \cdot \frac{1}{\Gamma_{2,k+1}} = \prod_{l=0}^2 a_{0,l}^{\frac{F_{k+1}}{F_k} - F_{k-l}} \\ &= \prod_{l=0}^2 a_{0,l}^{\frac{(-1)^{k-l} F_{l+1}}{F_k}} \rightarrow 1 \text{ as } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Concluimos que si n_2 es suficientemente grande, $|\beta_2| \leq C2^{n_2}$.

Paso tres (paso inductivo): supongamos que hemos definido Q_1, \dots, Q_k , $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, β_1, \dots, β_k , y números n_1, \dots, n_k tal que para cada $1 \leq j < k$,

1. $Q_{j+1} = Q_j + \alpha_{j+1} \frac{z^{n_j+1}}{(n_j+1)!} + I^{n_j+2}(P_{j+1}) + \sum_{l=n_j+j+4}^{n_3-1} 1 \cdot \frac{z^l}{l!} + \beta_{n_{j+1}} \frac{z^{n_{j+1}}}{n_{j+1}!}$;
2. $c_{n_{j+1}+1}(Q_{j+1}) = c_{n_{j+1}+2}(Q_{j+1}) = 1$;
3. Si C es como en (4.1), la misma constante que en el paso anterior, $|\alpha_{j+1}| \leq C2^{n_{j+1}}$ y $|\beta_{j+1}| \leq C2^{n_{j+1}}$.

La construcción de Q_{k+1} satisfaciendo las condiciones 1, 2 y 3 se logra exactamente igual que como en el segundo paso, así que omitimos los detalles.

Sea $Q = \lim_k Q_k$. Está bien definido ya que para cada $l \leq k$ tenemos que $|Q_k^{(l)}| \leq C2^l$.

Para probar que Q es universal vamos a mostrar que $c_{n_k+2}(Q)Q^{(n_k+2)} - p_k \rightarrow 0$. Consideramos el sistema fundamental de seminormas dadas por

$$\|f\|_k = \sup_{j \geq 0} |a_n| \frac{k^j}{j!}, \quad (4.2)$$

donde, $k \in \mathbb{N}$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Estas seminormas inducen la topología usual de $H(\mathbb{C})$ (ver por ejemplo [74, Ejemplo 27.27] o [77]).

Por la condición 2, $c_{n_k+2}(Q) = 1$. Como las primeras k derivadas evaluadas en cero de $Q^{(n_k)+2}$ y p_k son iguales, y las derivadas de $Q^{(n_k)+2}$ entre $k+1$ y $n_{k+1}-1$ evaluadas en cero son iguales a uno, tenemos que para cada n ,

$$\|c_{n_k+2}(Q)Q^{(n_k+2)} - p_k\|_n = \sup_{j > k} \left| Q^{(n_k+2)+j}(0) \right| \frac{n^j}{j!} \leq \max \left\{ \frac{n^k}{k!}, \sup_{j \geq n_{k+1}} C 2^{n_k+j+2} \frac{n^j}{j!} \right\} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Probamos ahora que el operador bilineal no tiene vectores hipercíclicos densos. Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que si $|f(0)| < \delta$ y $\|g\|_1 < 1$, entonces $M^n(f, g) \rightarrow 0$. Luego, (f, g) no es un vector hipercíclico.

Sea $k \geq 1$ tal que $k 2^{2 \frac{n}{2}} \geq (n-2)! 2^{2 \frac{n-1}{2}}$ para todo n y sea $\delta = \frac{1}{k 2^2}$. Como $\|g\|_1 < 1$ tenemos que $|g^{(n)}(0)| \leq n!$ para todo n . Afirmamos que $|c_n(f, g)| \leq \frac{1}{k 2^{2 \frac{n}{2}}}$ para todo n . En efecto, para $n = 1$ tenemos que $|c_1(f, g)| = |f(0)| < \delta < \frac{1}{k 2^{2 \frac{1}{2}}}$ y para $n = 2$ tenemos que $|c_2(f, g)| = |f(0)g(0)| < \delta \cdot 1 = \frac{1}{k 2^2}$. Supongamos que nuestra afirmación es cierta para $n \geq 2$. Entonces

$$\begin{aligned} c_{n+1}(f, g) &= c_n(f, g)c_{n-1}(f, g)g^{(n-2)}(0) \leq \frac{(n-2)!}{k 2^{2 \frac{n}{2}} k 2^{2 \frac{n-1}{2}}} \\ &\leq \frac{1}{k^2 (2^{2 \frac{n-1}{2}})^2} \leq \frac{1}{k 2^{2 \frac{n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

Aplicando las desigualdades de Cauchy obtenemos

$$\|M^n(f, g)\|_R = \|c_n(f, g)g^{(n)}\|_R \leq \frac{1}{k 2^{2 \frac{n}{2}}} \|g^{(n)}\|_R \leq \frac{n!}{R^{n+1} 2\pi k 2^{2 \frac{n}{2}}} \|g\|_{2R} \rightarrow 0.$$

□

Finalizamos la sección con un último ejemplo en $H(\mathbb{C})$. Vamos a mostrar que el operador bilineal $N(f, g) = g(0) \cdot f'$ es hipercíclico. La dinámica inducida por este operador y su transpuesto $M(f, g) = f(0)g'$ son levemente diferentes. En efecto, mientras que en M solo g y el número $f(0)$ determinan la órbita de (f, g) , en N tanto f como g son relevantes.

Ejemplo 4.1.5. Sea $N \in \mathcal{L}(^2H(\mathbb{C}))$ el operador bilineal $N(f, g) = g(0)D(f)$, donde D es el operador derivación. Entonces N es hipercíclico y no fuertemente transitivo.

Demostración. La órbita con condiciones iniciales (f, g) es

$$N^n(f, g) = \begin{cases} c_n(f, g)D^{\frac{n+1}{2}}(f) & \text{si } n \text{ es impar;} \\ c_n(f, g)D^{\frac{n}{2}}(g) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Donde $c_n(f, g)$ se define como

$$c_n(f, g) = \begin{cases} g(0)^{F_n} f'(0)^{F_{n-1}} g'(0)^{F_{n-2}} f^{(2)}(0)^{F_{n-3}} \dots g^{(\frac{n-1}{2})}(0)^{F_1} & \text{si } n \text{ es impar;} \\ g(0)^{F_n} f'(0)^{F_{n-1}} g'(0)^{F_{n-2}} f^{(2)}(0)^{F_{n-3}} \dots g^{(\frac{n-2}{2})}(0)^{F_2} f^{(\frac{n}{2})}(0)^{F_1} & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

y F_n son los números de Fibonacci usuales. Los pesos $c_n(f, g)$ se pueden ver también de la siguiente manera. Consideremos $h(z)$ la función entera $h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j)}(0)}{(2j)!} z^{2j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{(2j-1)!} z^{2j-1}$. Luego, h es una mezcla entre g y f , cumpliendo $h^{(n)}(0) = g^{(\frac{n}{2})}(0)$ si n es par y $h^{(n)}(0) = f^{(\frac{n+1}{2})}(0)$ si n es impar. Si definimos $c_n : H(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ como $c_n(\tilde{f}) = \tilde{f}(0)^{F_n} \cdot \dots \cdot \tilde{f}^{(n-1)}(0)^{F_1}$, entonces $c_n(h) = c_n(g, f)$. Como $c_n(\tilde{f})$ satisface las relaciones de recurrencia $c_{n+1}(\tilde{f}) = c_n(\tilde{f}) \cdot c_{n-1}(\tilde{f}) \cdot \tilde{f}^{(n)}(0)$, $c_n(f, g)$ cumple que

$$c_{n+1}(f, g) = \begin{cases} c_n(f, g) \cdot c_{n-1}(f, g) \cdot g^{(\frac{n-1}{2})}(0) & \text{si } n \text{ es impar;} \\ c_n(f, g) \cdot c_{n-1}(f, g) \cdot f^{(\frac{n}{2})}(0) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Enfocamos nuestra atención únicamente en las iteraciones pares y nos olvidamos de las impares. Si logramos construir (f, g) tal que las iteraciones pares son densas, entonces obviamente la órbita completa también es densa. Reescribimos las iteraciones pares como $c_{2n}(f, g)D^n(g)$. Notemos que esto es un operador universal multiplicado por unos ciertos pesos que dependen de f y g . Por lo tanto, si encontramos un vector g que es D -hipercíclico y un vector $f \in H(\mathbb{C})$ tal que $c_{2n}(f, g) = 1$, entonces la órbita será densa.

Supongamos ahora que $g \in H(\mathbb{C})$ es fijo y $g \sim \sum a_n \frac{z^n}{n!}$. Afirmamos que $f \sim \sum b_n \frac{z^n}{n!}$, donde $b_n = \prod_{i < n} a_i^{-1}$, cumple $c_{2n}(f, g) = 1$.

En efecto, usaremos la conocida identidad

$$F_{2n} = \sum_{j=1}^n F_{2j-1}. \quad (4.4)$$

Luego,

$$\begin{aligned} c_{2n}(f, g) &= a_0^{F_{2n}} b_1^{F_{2n-1}} a_1^{F_{2n-2}} \dots a_{n-1}^{F_1} b_n^{F_1} \\ &= a_0^{F_{2n}} (a_0^{-1})^{F_{2n-1}} a_1^{F_{2n-2}} (a_0^{-1} a_1^{-1})^{F_{2n-3}} \dots a_{n-1}^{F_1} (a_0^{-1} \dots a_{n-1}^{-1})^{F_1} \\ &= a_0^{F_{2n} - \sum_{j \leq n} F_{2j-1}} \dots a_{n-1}^{F_2 - F_1} = 1. \end{aligned}$$

La prueba finaliza construyendo una función D -hipercíclica g tal que su función asociada f está bien definida. La función D -hipercíclica g se puede construir como sigue. Sea $\{P_n\}_n$ una sucesión densa de polinomios que cumplen que $\deg(P_n) = n$, $P_n = \sum_{j=1}^n \alpha_{n,j} \frac{z^j}{j!}$, con $\alpha_{n,j} \neq 0$ y $n > \alpha_{n,j} > \frac{1}{n}$ para $j \leq n$. Sea $k_1 = 0$ y $k_n = \sum_{j < n} j$ para $n > 1$. Para un polinomio $P(z) =$

$\sum_{j=0}^n \frac{a_j}{j!} z^n$ consideramos su primitiva usual $I(p) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_j}{j!} z^j$. Afirmamos que $g = \sum_n I^{k_n}(P_n)$ es hipercíclica. Es simple mostrar que g está bien definida. Para probar que es hipercíclica, vamos a usar las seminormas definidas en (4.2). Entonces

$$\begin{aligned} \|D^{k_n} g - P_n\|_k &= \left\| \sum_{j=n+1} I^{k_j - k_n} P_j \right\|_k \\ &\leq \sum_{j=n+1} \|I^{k_j - k_n} P_j\|_k \\ &< \sum_{j=n+1} j \frac{k^j}{j!} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Probamos ahora que f está bien definida. Observemos que si $g(z) = \sum_n a_n z^n$, entonces $a_n = \alpha_{l,j}$ para $n = k_l + j$. Luego, $|a_n| > \frac{1}{l} > \frac{1}{(2n)^{\frac{1}{2}}}$. Esto implica que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|_k = \sup_j \left(\prod_{i < j} a_i^{-1} \right) \frac{k^j}{j!} < \sup_j 2^{\frac{1}{2}} j!^{\frac{1}{2}} \frac{k^j}{j!} < \infty.$$

Para probar que N no es fuertemente transitivo es suficiente probar que el conjunto de vectores hipercíclicos no es denso en $H(\mathbb{C}) \times H(\mathbb{C})$. En la prueba del Teorema 4.1.4 mostramos que hay un $\delta > 0$ y $k > 1$ tal que para todo f, g tal que $|f(0)| < \delta$ y $\|g\|_1 < 1$, vale que $\tilde{c}_n(f, g) := |f(0)^{F_n} g(0)^{F_{n-1}} \dots g^{(n-2)}(0)| \leq \frac{1}{k^{2^{\frac{n}{2}}}}$. Luego, si $h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j)}(0)}{(2j)!} z^{2j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{(2j-1)!} z^{2j-1}$ tenemos que si $|h(0)| < \delta$ y $\|h'\|_1 < 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $|c_n(f, g)| = \tilde{c}_n(h, h') < \frac{1}{k^{2^{\frac{n}{2}}}}$. En este caso obtenemos, por las desigualdades de Cauchy y (4.3), que

$$\|N^n(f, g)\|_R \leq \frac{n! \max\{\|f\|_{R+1}, \|g\|_{R+1}\}}{k^{2^{\frac{n}{2}}}} \rightarrow 0.$$

Como los pares $(f, g) \in H(\mathbb{C}) \times H(\mathbb{C})$ tal que la función h (definida como antes) satisface que $|h(0)| < \delta$ y $\|h'\|_1 < 1$ es abierto en $H(\mathbb{C}) \times H(\mathbb{C})$, deducimos que el conjunto de vectores hipercíclicos no es residual. \square

4.2. Operadores multilineales hipercíclicos en espacios de Banach arbitrarios

En esta sección probamos el resultado principal del capítulo, el Teorema 4.2.3, el cual establece que todo espacio de Banach de dimensión infinita y separable admite un operador multilineal hipercíclico. Ésto da una respuesta positiva a la pregunta C y además implica la existencia de operadores hipercíclicos no fuertemente transitivos con conjunto de vectores hipercíclicos no residual.

4.2.1. Un primer ejemplo en ℓ_p

Como el operador coshift en ℓ_p opera como el operador de diferenciación en $H(\mathbb{C})$, de los resultados de la sección anterior el operador bilineal $M(x, y) = e'_1(y)B(x)$ es un buen candidato a ser hipercíclico en $n \ell_p$, $1 \leq p < \infty$. Éste es en efecto el caso.

Ejemplo 4.2.1. Sean $X = \ell_p$ o c_0 , $p < \infty$ y $M(x, y) = e'_1(y)B(x)$. Entonces M es hipercíclico.

Dados vectores $x, y \in X$, las iteraciones $M^n(x, y)$ son de la forma

$$M^n(x, y) = \begin{cases} c_n(x, y)B^{\frac{n+1}{2}}(x) & \text{si } n \text{ es impar;} \\ c_n(x, y)B^{\frac{n}{2}}(y) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Donde $c_n(x, y)$ se define como

$$c_n(x, y) = \begin{cases} y_1^{F_n} x_2^{F_{n-1}} y_2^{F_{n-2}} x_3^{F_{n-3}} \dots y_{\frac{n-1}{2}}^{F_1} & \text{si } n \text{ es impar;} \\ y_1^{F_n} x_2^{F_{n-1}} y_2^{F_{n-2}} x_3^{F_{n-3}} \dots y_{\frac{n-2}{2}}^{F_1} x_{\frac{n}{2}}^{F_1} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

y F_n son los números de Fibonacci usuales.

Si probamos que las iteraciones pares son densas, entonces toda la órbita lo será. Notemos además que si podemos construir un vector hipercíclico y para $2B$ y un vector bien definido x tal que $c_{2n}(x, y) = 2^n$ entonces las iteraciones pares $c_{2n}(x, y)B^n(y)$ formarán una sucesión densa.

Para construir el vector necesitaremos el siguiente lema.

Lema 4.2.2. Sea $X = \ell_p$ o c_0 , $p < \infty$. Sea $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$ la sucesión tal que $c_{2n}((2^{a_k})_k, 1) = 2^n$. Entonces existe un vector hipercíclico y para $2B$ tal que el vector

$$z_{i+1} := 2^{a_i} \cdot \prod_{j \leq i} y_j^{-1} \in X.$$

La construcción del vector universal es en realidad una versión simplificada de los resultados de la siguiente subsección. Omitimos la prueba y referimos al lector al Teorema 4.2.5 (ver también el Lema 4.2.6).

Prueba del Ejemplo 4.2.1. Si definimos, como en el Ejemplo 4.1.5, $x_{i+1} = \prod_{j \leq i} y_j^{-1}$, se sigue que $c_{2n}(x, y) = 1$. Luego, si z es la sucesión $(x_k 2^{a_k})_k$, entonces $c_{2n}(z, y) = c_{2n}(x, y) c_{2n}((2^{a_k})_k, 1)$. Por lo tanto, es suficiente encontrar un vector y y una sucesión $(a_k)_k$ tal que $c_{2n}((2^{a_k})_k, 1) = 2^n$, tal que y es un vector hipercíclico para $2B$ y tal que $z_{i+1} = 2^{a_i} x_{i+1} = 2^{a_i} \prod_{j \leq i} y_j^{-1}$ define un vector en X . La existencia de tal vector y es una consecuencia del lema anterior. \square

4.2.2. Operadores multilineales hipercíclicos en espacios de Banach arbitrarios

Probamos en esta sección el resultado principal del capítulo.

Teorema 4.2.3. Sea X un espacio de Banach separable y de dimensión infinita. Entonces para todo $m \geq 1$ existe un operador m -lineal hipercíclico actuando en X .

El caso $m = 1$ se debe a Ansari-Bernal [2, 18], quienes independientemente probaron la existencia de operadores hipercíclicos en espacios de Banach arbitrarios. Luego Bonet y Peris [31] generalizaron el resultado a espacios de Fréchet. Probaremos el Teorema 4.2.3 solo para $m = 2$, siendo el caso $m > 2$ análogo pero la notación más técnica.

Vamos a dividir la prueba del Teorema 4.2.3 en tres pasos. Primero probaremos que un cierto operador multilineal pesado M definido en ℓ_1 es hipercíclico. Luego daremos una noción de cuasiconjugación para operadores multilineales y probaremos que la misma preserva hiperciclicidad. Esta definición coincide con la propuesta por Grosse-Erdmann y Kim para bihiperciclicidad [56]. Finalmente, usando los mismos argumentos aplicados para probar el Teorema 2.4.4 mostraremos que todo espacio de Banach, separable y de dimensión infinita admite un operador multilineal que es cuasiconjugado a M .

El operador multilineal que estamos buscando es una generalización del Ejemplo 4.1.5 al espacio de Banach ℓ_1 . Efectivamente el operador $e'_1(y)B(x)$ resulta hipercíclico. Sin embargo, como necesitamos que se cuasiconjugué a espacios de Banach arbitrarios, necesitamos pesar al coshift. Al mismo tiempo, los pesos no pueden tender muy rápido a cero ya que perderíamos la hiperciclicidad.

Paso uno

Teorema 4.2.4. *Sea $\omega = (1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots)$ y $B_\omega : \ell_1 \rightarrow \ell_1$ definido como $[B_\omega(x)]_i = \omega_i x_{i+1}$. El operador multilineal $M(x, y) = e'_1(y)B_\omega(x)$ es hipercíclico.*

Probamos primero la existencia de un vector universal para una familia de operadores coshift pesados.

Teorema 4.2.5. *Sea $a_n = 1 - \frac{n(n-1)}{2}$ y B_ω el operador coshift pesado actuando en ℓ_1 con pesos $\omega_n = \frac{1}{n^2}$. Entonces existe un vector universal $y \in \ell_1$ for $2^n n!^2 B_\omega^n$ tal que el vector $x_{i+1} = 2^{a_i} i!^2 i^2 \prod_{j \leq i} y_j^{-1}$ está bien definido en ℓ_1 .*

Demostración. Dado $y \in \ell_1$ consideramos el vector asociado

$$[\Phi(y)]_i = 2^{a_i} i!^2 i^2 \prod_{l \leq i} |y_l|^{-1}.$$

Necesitamos construir un vector universal y tal que $\Phi(y) \in \ell_1$. Sea $(z_n)_n$ una sucesión densa en c_{00} , tal que para todo n , $n = \max\{i : [z_n]_i \neq 0\}$, y para todo $i \leq n$, $\frac{1}{n} \leq |[z_n]_i| \leq n$.

Consideremos S_ω la inversa formal de B_ω . Construiremos el vector procediendo como sigue. Usualmente un vector universal para la familia $\{2^n n!^2 B_\omega^n\}$ es de la forma

$$\tilde{z} = \sum_k S_\omega^{n_k} \frac{z_k}{2^{n_k} n_k!^2}.$$

Sin embargo, este vector tiene gaps con ceros de longitud $n_k - k$, y luego es imposible que $\Phi(\tilde{z}) \in \ell_1$. Por eso agregaremos en cada gap un vector de control y alargaremos la longitud de cada gap $(n_k - k)$ para forzar $[\phi(z)]_i \leq \frac{1}{i^2}$ para todo $i \leq k$. Sea $n_1 = 0$. Nuestro vector universal será de la forma

$$\begin{aligned} z &= z_1 + \sum_{l=1+1}^{n_2} \frac{1}{l^2} e_l + S_\omega^{n_2} \frac{z_2}{2^{n_2} n_2!^2} + \sum_{l=n_2+2+1}^{n_3} \frac{1}{l^2 2^{n_2}} e_l + S_\omega^{n_3} \frac{z_3}{2^{n_3} n_3!^2} + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} S_\omega^{n_k} \frac{z_k}{2^{n_k} n_k!^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=n_{k-1}+k-1+1}^{n_k} \frac{1}{l^2 2^{n_{k-1}}} e_l. \end{aligned}$$

Notemos que z se puede escribir como el límite de los vectores

$$u_j = \sum_{k=1}^j S_\omega^{n_k} \frac{z_k}{2^{n_k} n_k!^2} + \sum_{k=2}^j \sum_{l=n_{k-1}+k-1+1}^{n_k} \frac{1}{l^2 2^{n_{k-1}}} e_l.$$

Cada u_j extiende u_{j-1} y $[\Phi(u_j)]_i$ lee solo las primeras coordenadas. Vamos a construir entonces los vectores u_j inductivamente de forma que $[\Phi(u_j)]_i \leq \frac{1}{i^2}$ para todo $n_2 < i < n_j + j + 1$. Esta condición se transfiere automáticamente a z .

Construimos ahora los números n_k (i.e. los gaps), y luego z , por inducción. Tomemos $n_1 = 0$ y $u_1 = z_1$. Sea n_2 tal que, para $n \geq n_2$,

$$2^{\frac{n^2}{4}} n^4 \cdot n!^4 \cdot 2^{2n} \cdot 2^2 \cdot 2^{a_n} \leq 1 \quad (4.5)$$

Esto se puede lograr, porque $a_n \sim -\frac{n^2}{2}$. Definimos u_2 como

$$u_2 := u_1 + \sum_{l=1+1}^{n_2} \frac{1}{l^2} e_l + \frac{S_\omega^{n_2} z_2}{2^{n_2} n_2!^2}.$$

Afirmamos que $[\Phi(u_2)]_i \leq \frac{1}{i^2}$ para $i = n_2 + 1, i = n_2 + 2$ y además que $[\Phi(\tilde{u}_2)]_i \leq \frac{1}{i^2}$ para $i \geq n_2 + 1$, donde $\tilde{u}_2 = u_2 + \sum_{l=n_2+2+1}^{\infty} \frac{1}{l^2 2^{n_2}} e_l$. Tener una cota para $[\Phi(\tilde{u}_2)]_i$ nos va a ayudar a estimar $[\phi(u_3)]_i$ en el siguiente paso. Necesitamos primero acotar $\prod_{i=1}^l |[u_2]_i|^{-1}$ para $n_2 + 1 \leq l \leq n_2 + 2$.

Recordemos que $|[z_2]_i| \geq \frac{1}{2}$ para $i \leq 2$, y que $\text{supp}(z_2) = [1, 2]$. Esto implica que $\left| [S_\omega^{n_2}(\frac{z_2}{2^{n_2} n_2!^2})]_l \right|^{-1} \leq 2^{n_2} \cdot 2$ para $l = n_2 + 1$ y $l = n_2 + 2$. Acotando elementalmente obtenemos que,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^l |[u_2]_i|^{-1} &= \prod_{i=1}^1 |[u_2]_i|^{-1} \cdot \prod_{i=2}^{n_2} |[u_2]_i|^{-1} \cdot \prod_{i=n_2+1}^l |[u_2]_i|^{-1} \\ &\leq 1 \cdot n_2!^2 \cdot 2^{2n_2} \cdot 2^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Luego, por (4.5) tenemos que para $n_2 + 1 \leq l \leq n_2 + 2$ vale que

$$[\Phi(u_2)]_l \leq 2^{a_l} l!^2 l^2 \prod_{i=1}^l |[u_2]_i|^{-1} \leq l!^4 \cdot l^2 \cdot 2^{2n_2} \cdot 2^2 \cdot 2^{a_l} \leq \frac{1}{l^2}.$$

Con esta elección de n_2 obtenemos también que $[\Phi(\tilde{u}_2)]_i \leq \frac{1}{i^2}$ para $i \geq n_2 + 1$. Para ver esto último, necesitamos primero una cota para $\prod_{l=1}^i |[\tilde{u}_2]_l|^{-1}$, con $i \geq n_2 + 3$. Usando la desigualdad (4.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \prod_{l=1}^i |[\tilde{u}_2]_l|^{-1} &\leq n_2!^2 \cdot 2^{2n_2} \cdot 2^2 \cdot \prod_{l=n_2+2+1}^i l^2 2^{n_2} \\ &\leq i!^2 \cdot 2^{2n_2} \cdot 2^2 \cdot 2^{n_2(i-2-n_2)} \\ &\leq i!^2 \cdot 2^{2n_2} \cdot 2^2 \cdot 2^{\frac{i^2}{4}} \leq i!^2 \cdot 2^{2i} \cdot 2^2 \cdot 2^{\frac{i^2}{4}}, \end{aligned}$$

donde usamos que $n_2(i - 2 - n_2) \leq \frac{i^2}{4}$ para todo $i \geq n_2$. En consecuencia, por la elección de y porque $i \geq n_2$,

$$\Phi[(\tilde{u}_2)]_i \leq 2^{a_i} i!^2 \cdot i^2 \cdot i!^2 \cdot 2^{2i} \cdot 2^2 \cdot 2^{\frac{i^2}{4}} \leq \frac{1}{(i+2)^2} \leq \frac{1}{i^2}.$$

Vamos a definir de forma inductiva los números $(n_j)_j$ (o los gaps $[n_{j-1} + j - 1 + 1, n_j]$) y los vectores $(u_j)_j$ y $(\tilde{u}_j)_j$ como en el primer paso. Esto es, u_j extiende a u_{j-1} y \tilde{u}_j extiende a u_j . Queremos además que \tilde{u}_j cumpla que $[\Phi(\tilde{u}_j)]_i \leq \frac{1}{i^2}$ para todo $n_2 < i$.

Luego definimos para todo $j \geq 2$,

(I)

$$u_j = u_{j-1} + \sum_{l=n_{j-1}+j-1+1}^{n_j} \frac{1}{2^{n_{j-1}l^2}} e_l + S_\omega^{n_j} \left(\frac{z_j}{2^{n_j} n_j!^2} \right);$$

(II)

$$\tilde{u}_j = u_j + \sum_{l=n_j+j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_j l^2}} e_l;$$

$$(III) \quad \frac{2^{n_{j-1} n_{j-1}!^2 (n_j + j)^{2j} j^2}}{2^{n_j}} < \frac{1}{j^2};$$

(IV) para todo $n \geq n_j$

$$(n + j)^4 \cdot 2^{\frac{n^2}{4}} \cdot n!^4 \cdot 2^{a_n} \cdot \pi_{j-1} \cdot 2^{n_{j-1}n} \cdot 2^{jn} \cdot j^j \leq 1,$$

donde

$$\pi_{j-1} := \prod_{l=1}^{n_{j-1}+j-1} |[u_{j-1}]_l|^{-1}.$$

Las sucesiones $(n_j)_j$, $(u_j)_j$ y $(\tilde{u}_j)_j$ están bien definidas porque las condiciones (i), (ii) y (iii) se cumplen automáticamente tomando n_j suficientemente grande.

Afirmamos que cada u_j satisface que para $n_2 < i \leq n_j + j$,

$$|[\Phi(u_j)]_i| \leq \frac{1}{i^2}. \tag{4.7}$$

Como cada u_j extiende a u_{j-1} y para todo v , $[\phi(v)]_i$ depende solamente en sus primeras i -coordenadas de v , es suficiente con probar que $[\phi(u_j)]_i \leq \frac{1}{i^2}$ para $n_{j-1} + j - 1 < i \leq n_j + j$. Si $n_j + 1 \leq i \leq n_j + j$ se sigue, por una estimación directa, que

$$\prod_{l=1}^i |[u_j]_l|^{-1} \leq \pi_{j-1} \cdot \left(\prod_{l=n_{j-1}+j}^{n_j} 2^{n_{j-1}l^2} \right) \cdot \left(\prod_{l=n_j+1}^i 2^{n_j n_j!^2} |[S_\omega^{n_j}(z_j)]_l|^{-1} \right) \leq \pi_{j-1} \cdot n_j!^2 \cdot 2^{n_{j-1}n_j} \cdot 2^{jn_j} \cdot j^j.$$

Aplicando (IV) deducimos que $[\Phi(u_j)]_i \leq \frac{1}{i^2}$.

Si $n_{j-1} + j - 1 < i \leq n_j$, tenemos que $n_{j-1}(i - n_{j-1} - j + 1) \leq \frac{i^2}{4}$ y luego

$$\begin{aligned} \prod_{l=1}^i [u_j]_l^{-1} &\leq \pi_{j-1} \cdot \frac{i!^2}{(n_{j-1} + j - 1)!^2} 2^{n_{j-1}(i - n_{j-1} - j + 1)} \\ &\leq \pi_{j-2} \cdot \left(\prod_{l=n_{j-2}+j-1}^{n_{j-1}} 2^{n_{j-2}l^2} \right) \cdot \left(\prod_{l=n_{j-1}+1}^{n_{j-1}+j-1} 2^{n_{j-1}n_{j-1}!^2} \frac{l^2(j-1)}{(l+n_{j-1})!^2} \right) \cdot \frac{i!^2}{(n_{j-1} + j - 1)!^2} 2^{\frac{i^2}{4}} \\ &\leq \pi_{j-2} \cdot n_{j-1}!^2 \cdot 2^{n_{j-2}n_{j-1}} \cdot 2^{(j-1)n_{j-1}} \cdot (j-1)^{j-1} \cdot \frac{i!^2}{(n_{j-1} + j - 1)!^2} 2^{\frac{i^2}{4}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por (IV), si aplicamos n_{j-1} a,

$$[\Phi(u_j)]_i = 2^{a_i} i!^2 i^2 \prod_{l=1}^i [u_j]_l^{-1} \leq 2^{a_i} i!^2 i^2 \pi_{j-2} \cdot 2^{n_{j-2}n_{j-1}} \cdot 2^{(j-1)n_{j-1}} \cdot (j-1)^{j-1} \cdot 2^{\frac{i^2}{4}} \leq \frac{1}{i^2}.$$

El vector universal que estamos buscando es $z = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j$. Para ver que el vector está bien definido usamos la desigualdad (III). Para $n_j + 1 \leq l \leq j + n_j$ tenemos que,

$$|[z]_l| = \left| \left[S_\omega^{n_j} \frac{z_j}{2^{n_j} n_j!^2} \right]_l \right| \leq \left| \frac{j(n_j + j)!^2}{2^{n_j} n_j!^2} \right| \leq \frac{j(n_j + j)^{2j}}{2^{n_j}}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left\| S_\omega^{n_j} \frac{z_j}{2^{n_j} n_j!^2} \right\|_1 &\leq \frac{j^2(n_j + j)^{2j}}{2^{n_j}} \\ &\leq \frac{1}{j^2}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Por lo tanto obtenemos,

$$\|z\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} S_\omega^{n_j} \frac{z_j}{2^{n_j} n_j!^2} \right\|_1 + \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=n_j+j+1}^{n_{j+1}} \frac{e_k}{k^2 2^{n_j}} \right\|_1 \leq 2 \left\| \left(\frac{1}{j^2} \right)_j \right\|_1 < \infty.$$

Resta por ver que $\Phi(z)$ está bien definido y que z es universal. La buena definición se deduce de (4.7). En efecto, z extiende a u_j para cada j y si $n_j > i$ entonces $|[\Phi(z)]_i| = |[\Phi(u_j)]_i| \leq \frac{1}{i^2}$.

Finalmente el vector es universal por las desigualdades (III) y (4.8). Es suficiente mostrar que

$$2^{n_j} n_j!^2 B_\omega^{n_j}(z) - z_j \rightarrow 0,$$

$$\begin{aligned} \|2^{n_j} n_j!^2 B_\omega^{n_j}(z) - z_j\| &= \left\| 2^{n_j} n_j!^2 B_\omega^{n_j} \left(\sum_{l=1}^{\infty} S_\omega^{n_l} \frac{z_l}{2^{n_l} n_l!^2} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=n_l+l+1}^{n_{l+1}} \frac{e_k}{k^2 2^{n_l}} \right) - z_j \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{l=j+1}^{\infty} S_\omega^{n_l - n_j} \frac{z_l 2^{n_j} n_j!^2}{2^{n_l} n_l!^2} \right\| + \left\| \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=n_l+l+1}^{n_{l+1}} \frac{2^{n_j} n_j!^2 B_\omega^{n_j} e_k}{k^2 2^{n_l}} \right\| \\ &\leq \sum_{l=j+1}^{\infty} \frac{2^{n_{l-1}} n_{l-1}!^2}{2^{n_l} n_l!^2} \|S_\omega^{n_l - n_j} z_l\| + \left\| \sum_{l=j}^{\infty} \sum_{k=n_l+l+1}^{n_{l+1}} \frac{2^{n_j} n_j!^2}{k^2 2^{n_l}} \frac{k!^2}{(n_j + k)!^2} e_{k-n_j} \right\| \\ &\leq \sum_{l=j+1}^{\infty} \frac{2^{n_{l-1}} n_{l-1}!^2}{2^{n_l} n_l!^2} \|S_\omega^{n_l} z_l\| + \sum_{l=n_j+j+1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \\ &\leq \sum_{l=j+1}^{\infty} \frac{2^{n_{l-1}} n_{l-1}!^2 (n_l + l)^{2l} l^2}{2^{n_l}} + \sum_{l=n_j+j+1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \\ &\leq 2 \sum_{l \geq j} \frac{1}{l^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Para la prueba del Teorema 4.2.3 vamos a necesitar la siguiente propiedad de los números de Fibonacci.

Lema 4.2.6. Sea $(a_n)_n$ una sucesión recurrentemente definida como

$$a_n := \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j} F_{2j+1}, \end{cases}$$

donde $(F_j)_j$ es la sucesión de Fibonacci usual. Entonces

$$a_n = 1 - \frac{n(n-1)}{2} = - \sum_{j=2}^{n-1} j.$$

Demostración. Trabajamos con la sucesión auxiliar $b_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j} F_{2j}$. Afirmamos que para $n \geq 3$, $1 - b_n = - \sum_{j=2}^{n-1} j$. Si $n = 3$, tenemos que

$$b_3 = \sum_{j=1}^{3-1} a_{3-j} F_{2j} = a_1 F_2 + a_2 F_4 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 1.$$

Luego $1 - b_3 = 0 = - \sum_{j=2}^{3-1} j$. Supongamos ahora que $n > 3$, entonces

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{j=1}^n a_{n+1-j} F_{2j} = a_n + \sum_{j=2}^n a_{n+1-j} F_{2j-2} + \sum_{j=2}^n a_{n+1-j} F_{2j-1} \\ &= a_n + b_{n-1} + (n - a_n) = n + b_{n-1}. \end{aligned}$$

Procediendo por inducción obtenemos

$$1 - b_n = 1 - n - b_{n-1} = - \sum_{j=2}^n j.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} a_n &= n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j} F_{2j+1} = n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j} F_{2j} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j} F_{2j-1} \\ &= n - b_n - (n - 1 - a_{n-1} + a_{n-1}) = 1 - b_n. \end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 4.2.4. Calculamos la órbita generado por un par de vectores x, y ,

$$M^n(x, y) = \begin{cases} B_{\omega^{\frac{n+1}{2}}}(x) c_n(x, y) d_n(\omega) & \text{si } n \text{ es impar;} \\ B_{\omega^{\frac{n}{2}}}(y) c_n(x, y) d_n(\omega) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \quad (4.9)$$

Donde $c_n(x, y)$ se define como

$$c_n(x, y) = \begin{cases} y_1^{F_n} x_2^{F_{n-1}} y_2^{F_{n-2}} x_3^{F_{n-3}} \dots y_{\frac{n+1}{2}}^{F_1} & \text{si } n \text{ es impar;} \\ y_1^{F_n} x_2^{F_{n-1}} y_2^{F_{n-2}} x_3^{F_{n-3}} \dots x_{\frac{n}{2}+1}^{F_1} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

y

$$d_n(\omega) = \begin{cases} \omega_1^{F_{n+1}-1} \cdot \omega_2^{F_{n-1}-1} \cdot \omega_3^{F_{n-3}-1} \dots \omega_{\frac{n-1}{2}}^{F_4-1} & \text{si } n \text{ es impar;} \\ \omega_1^{F_{n+1}-1} \cdot \omega_2^{F_{n-1}-1} \cdot \omega_3^{F_{n-3}-1} \dots \omega_{\frac{n}{2}}^{F_3-1} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

La sucesión $c_n(x, y)$ se puede ver como $c_n(z)$, donde z es una mezcla entre x e y , $z = (y_1, x_2, y_2, x_3, \dots)$ y $c_n(z) = z_1^{F_n} \dots z_n^{F_1}$. Como vimos en la sección 4.1, tenemos que $c_n(z) = c_{n-1}(z) c_{n-2}(z) z_n$. Similarmente la sucesión $d_n(\omega)$ satisface la siguiente relación recursiva, para $n \geq 3$,

$$d_n(\omega) = \begin{cases} d_{n-1}(\omega) d_{n-2}(\omega) \omega_1 \dots \omega_{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar} \\ d_{n-1}(\omega) d_{n-2}(\omega) \omega_1 \dots \omega_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

En efecto, supongamos ahora que $n \geq 3$ es par, entonces $n - 1$ y $n + 1$ son impares. Usando las fórmulas de arriba obtenemos

$$\begin{aligned} d_n(\omega) d_{n-1}(\omega) \omega_1 \dots \omega_{\frac{n+1}{2}-1} &= \omega_1^{F_{n+1}-1} \omega_2^{F_{n-1}-1} \dots \omega_{\frac{n}{2}} \cdot \omega_1^{F_{n-1+1}-1} \omega_2^{F_{n-1-1}-1} \dots \omega_{\frac{n-2}{2}}^2 \cdot \omega_1 \dots \omega_{\frac{n}{2}} \\ &= \omega_1^{F_{n+1}-1+F_{n-1}+1} \omega_2^{F_{n-1}-1+F_{n-2}-1} \dots \omega_{\frac{n-2}{2}}^{F_5-1+F_4-1+1} \omega_{\frac{n}{2}}^2 \\ &= \omega_1^{F_{n+2}-1} \omega_2^{F_n-1} \dots \omega_{\frac{n-2}{2}}^{F_6-1} \omega_{\frac{n}{2}}^{F_4-1}. \end{aligned}$$

El caso n impar es análogo.

Probamos ahora la igualdad (4.9) por inducción. Si $n = 1$ tenemos que $c_1(x, y) = y_1^{F_1} = y_1$ y $d_1(\omega) = \omega_1^{F_2-1} = 1$, mientras que $M(x, y) = B_\omega(x)y_1$. Supongamos que $n > 1$ es par, entonces

$$\begin{aligned}
 M^n(x, y) &= M(M^{n-2}(x, y), M^{n-1}(x, y)) \\
 &= M\left(B_\omega^{\frac{n-2}{2}}(y)c_{n-2}(x, y)d_{n-2}(\omega), B_\omega^{\frac{n}{2}}(x)c_{n-1}(x, y)d_{n-1}(\omega)\right) \\
 &= B_\omega\left(B_\omega^{\frac{n-2}{2}}(y)c_{n-2}(x, y)d_{n-2}(\omega)\right) \cdot \left[B_\omega^{\frac{n}{2}}(x)c_{n-1}(x, y)d_{n-1}(\omega)\right]_1 \\
 &= B_\omega^{\frac{n}{2}}(y) \cdot c_{n-2}(x, y) \cdot d_{n-2}(\omega) \cdot c_{n-1}(x, y) \cdot d_{n-1}(\omega) \cdot x_{\frac{n}{2}+1} \cdot \omega_1 \dots \omega_{\frac{n}{2}} \\
 &= B_\omega^{\frac{n}{2}}(y)c_n(x, y)d_n(\omega).
 \end{aligned}$$

El caso n impar es análogo.

En lo que sigue vamos a contruir un par de vectores (x, y) tal que las iteraciones pares $(M^{2n}(x, y))_n$ son densas. La sucesión $(c_{2n}(x, y)d_{2n}(\omega)B_\omega^n(y))_n$ se puede ver como el producto de una familia universal con ciertos pesos. Si logramos controlar los pesos de forma que y sea universal para dicha familia, entonces la órbita será densa.

Sea $y \in \ell_1$ fijo, queremos encontrar x (dependiendo en y) tal que $c_{2n}(x, y)d_{2n}(\omega)B_\omega^n(\cdot)$ resulta universal. Observemos que B_ω^n tiene norma $\frac{1}{n!^2}$. Esto implica que, para que la familia resulte universal, los pesos buscados tienen que ser de orden más grande que $n!^2$. Además notemos que c_n es multiplicativa, donde el producto en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es coordenada a coordenada, esto es $c_n(z \cdot w) = c_n(z) \cdot c_n(w)$.

Si queremos tomar x para que se cancelen los pesos inducidos por ω e y , un vector posible es \tilde{x} con

$$[\tilde{x}]_{i+1} = \omega_i^{-1} \prod_{l \leq i} y_l^{-1} \omega_l^{-1}.$$

En este caso particular tenemos que $c_{2n}(x, y)d_{2n}(\omega) = n!^2$. Sin embargo, la familia $\{n!^2 B_\omega^n\}$ falla en ser universal y el vector \tilde{x} no está bien definido. Multiplicamos entonces \tilde{x} coordenada a coordenada por otra sucesión, 2^{a_n} , para obtener $c_{2n}(\tilde{x} \cdot 2^{a_n}, y) = 2^n n!^2$. Resulta que a_n es un polinomio de grado dos con coeficiente principal negativo. Esto nos va a permitir construir y tal que y es universal para $2^n n!^2 B_\omega^n$ y que x esté bien definido.

Como c_n es multiplicativa, a_n debe satisfacer $c_n(2^{a_n}, 1) = 2^n$. La sucesión $(a_n)_n$ que necesitamos es la que definimos en el Lema 4.2.6,

$$a_n := \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j} F_{2j+1}. \end{cases}.$$

Afirmamos que, para un vector y fijo, el vector x definido como

$$[x]_{i+1} = 2^{a_i} \omega_i^{-1} \prod_{j \leq i} y_j^{-1} \omega_j^{-1} \tag{4.10}$$

satisface que $c_{2n}(x, y)d_{2n}(\omega) = 2^n n!^2$. Para mostrar esta igualdad vamos a usar la siguiente identidad.

$$F_{2n} = \sum_{j=1}^n F_{2j-1}. \quad (4.11)$$

A continuación probamos nuestra afirmación,

$$\begin{aligned} c_{2n}(x, y)d_{2n}(\omega) &= y_1^{F_{2n}} \cdot x_2^{F_{2n-1}} \cdot y_2^{F_{2n-2}} \cdot \dots \cdot x_n^{F_3} \cdot y_n \cdot x_{n+1} \cdot \omega_1^{F_{2n+1}-1} \cdot \omega_2^{F_{2n-1}-1} \cdot \omega_3^{F_{2n-3}-1} \cdot \dots \cdot \omega_n \\ &= (\omega_1 y_1)^{F_{2n}} \cdot (\omega_1 x_2)^{F_{2n-1}} \cdot (\omega_2 y_2)^{F_{2n-2}} \cdot (\omega_2 x_3)^{F_{2n-3}} \cdot \dots \cdot (\omega_{n-1} x_n)^{F_3} \cdot (\omega_n y_n) \cdot (\omega_n x_{n+1}) \cdot \omega_1^{-1} \cdot \dots \cdot \omega_n^{-1} \\ &= (\omega_1 y_1)^{F_{2n}} \cdot (\omega_1 y_1^{-1} \omega_1^{-2})^{F_{2n-1}} 2^{a_1 F_{2n-1}} \cdot (\omega_2 y_2)^{F_{2n-2}} \cdot \\ &\quad \cdot (\omega_2 y_1^{-1} y_2^{-1} \omega_1^{-1} \omega_2^{-2})^{F_{2n-3}} 2^{a_2 F_{2n-3}} \cdot \dots \cdot (\omega_n y_n) \cdot (\omega_n y_1^{-1} \cdot \dots \cdot y_n^{-1} \omega_1^{-1} \cdot \dots \cdot \omega_{n-1}^{-1} \omega_n^{-2} \cdot 2^{a_n}) \omega_1^{-1} \cdot \dots \cdot \omega_n^{-1} \\ &= (\omega_1 y_1)^{F_{2n} - \sum_{j=1}^n F_{2j-1}} (\omega_2 y_2)^{F_{2(n-1)} - \sum_{j=1}^{n-1} F_{2j-1}} \cdot \dots \cdot (\omega_{n-1} y_{n-1})^{F_4 - F_3 - F_1} \cdot y_n^{1-1} \\ &\quad \cdot 2^{a_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j} F_{2j+1}} \omega_1^{-1} \cdot \dots \cdot \omega_n^{-1} \\ &= (\omega_1 y_1)^0 \cdot \dots \cdot (\omega_{n-1} y_{n-1})^0 2^n \prod_{l=1}^n \omega_l^{-1} = 2^n n!^2. \end{aligned}$$

Luego basta encontrar un vector universal y para $2^n n!^2 B_\omega^n$ tal que su vector inducido x definido como en (4.10) está bien definido. Por el Lema 4.2.6,

$$a_n = 1 - \frac{n(n-1)}{2},$$

y por el Teorema 4.2.5 existen vectores x, y con las propiedades requeridas. \square

Paso dos

Recordemos que un operador m -lineal $L \in \mathcal{L}(^m X)$ se dice cuasiconjugado a un operador m -lineal $N \in \mathcal{L}(^m Y)$ si existe una función continua $\phi : Y \rightarrow X$ de rango denso, tal que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} Y^m & \xrightarrow{N} & Y \\ \downarrow \phi^m & & \downarrow \phi \\ X^m & \xrightarrow{L} & X \end{array},$$

donde $\phi^m = \phi \times \dots \times \phi$. Análogamente a [56, Theorem 3], tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.2.7. *Sea N un operador m -lineal hipercíclico. Si un operador m -lineal L es cuasiconjugado a N , entonces N es también hipercíclico.*

Demostración. Vamos a probar que $Orb_L(\phi(x_1), \dots, \phi(x_m)) = \phi(Orb_N(x_1, \dots, x_m))$ para cada m -tupla de vectores x_1, \dots, x_m . Es suficiente mostrar que para cada j , $L^j(\phi(x_1), \dots, \phi(x_m)) = \phi(N^j(x_1, \dots, x_m))$. Probamos esta igualdad por inducción. Para $j = 1$ es claro, ya que $L(\phi(x_1), \dots, \phi(x_m)) =$

$\phi(N(x_1, \dots, x_m))$. Supongamos que nuestra afirmación es verdadera para cada $i < j$, y supongamos primero que $j > m$, entonces

$$\begin{aligned} L^j(\phi(x_1), \dots, \phi(x_m)) &= L\left(L^{(j-m)}(\phi(x_1), \dots, \phi(x_m)), \dots, L^{(j-1)}(\phi(x_1), \dots, \phi(x_m))\right) \\ &= L\left(\phi(N^{(j-m)}(x_1, \dots, x_m), \dots, \phi(N^{(j-1)}(x_1, \dots, x_m))\right) \\ &= \phi\left(N\left(N^{(j-m)}(x_1, \dots, x_m), \dots, N^{(j-1)}(x_1, \dots, x_m)\right)\right) \\ &= \phi\left(N^j(x_1, \dots, x_m)\right). \end{aligned}$$

Si $j \leq m$ la prueba es análoga. Finalmente, sea (x_1, \dots, x_m) una tupla hipercíclica. Como $Orb_N(x_1, \dots, x_m)$ es densa y ϕ tiene rango denso, concluimos que $(\phi(x_1), \dots, \phi(x_m))$ es hipercíclico para L . \square

Paso final

Para probar el Teorema de existencia 4.2.3, vamos a usar el siguiente Lema probado independientemente por Pelczyński y Plichko (ver, [59, Theorem 1.27]). Es el mismo lema que usamos para probar el Teorema 2.4.4.

Lema 4.2.8. *Sea X un espacio de Banach infinito dimensional y separable. Entonces, existe para todo $\varepsilon > 0$ una base de Markushevich $(1 + \varepsilon)$. Esto es, existe una sucesión $(x_n, x_n^*)_n \subset X \times X^*$ tal que*

1. $\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X , $\text{span}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ es w^* -denso en X^*
2. $\sup_n \|x_n\| \cdot \|x_n^*\| < 1 + \varepsilon$.
3. $x_n^*(x_k) = \delta_{n,k}$.

Teorema 4.2.9. *Sea X un espacio de Banach infinito dimensional y separable. Sean $\omega (1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots)$ y M el operador bilineal $e'_1(y)B_\omega(x) \in \mathcal{L}(\ell_1; \ell_1)$, esto es $[M(x, y)]_i = y_1 \cdot \omega_i x_{i+1}$. Existe entonces un operador bilineal $N \in \mathcal{L}(\ell_1; \ell_1)$ tal que N es cuasiconjugado a M .*

Demostración. Sean $(x_n)_n$ y $(x_n^*)_n$ las sucesiones dadas por el lema de anterior. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\|x_n\| = 1$ y que $\|x_n^*\| \leq 2$. Sea N el operador bilineal

$$N(u, v) = x_1^*(v) \sum_{l=1}^{\infty} x_l^*(u) \frac{1}{(l-1)^2} x_{l-1}.$$

Como $\|x_n^*\| \leq 2$ y $\|x_n\| = 1$ se sigue que N es un vector continuo bien definido en X . Consideramos ahora el factor $\phi : \ell_1 \rightarrow X$, $\phi((a_n)_n) = \sum_l a_l x_l$. El operador ϕ está bien definido, ya que $\|x_n\| \leq 1$ y $(a_n)_n \in \ell_1$. Observemos que ϕ tiene rango denso, porque $x_n = \phi(e_n)$ y luego $X = \overline{\text{span}(\{x_n\})} \subseteq \overline{R(\phi)}$. Resta ver que N es cuasiconjugado a M vía ϕ . Como ϕ es lineal, basta chequear las relaciones conmutativas en los elementos de la base canónica de ℓ_1 . Si e_k son e_j elementos de la

base tenemos que

$$\begin{aligned}\phi(M(e_k, e_j)) &= \phi(e_1^*(e_j) \frac{1}{(k-1)^2} e_{k-1}) \\ &= \delta_{1,j} \frac{1}{(k-1)^2} x_{k-1}.\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que,

$$\begin{aligned}N(\phi(e_k), \phi(e_j)) &= N(x_k, x_j) = x_1^*(x_j) \cdot \sum_{l=1}^{\infty} x_l^*(x_k) \frac{1}{(l-1)^2} x_{l-1} \\ &= \delta_{1,j} \frac{1}{(k-1)^2} x_{k-1}.\end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 4.2.3. Aplicar los Teoremas 4.2.4, 4.2.9 y la Proposición 4.2.7. □

4.3. Existencia de operadores bilineales bihipercíclicos en espacios de Banach arbitrarios

Recordemos que la órbita inducida por un operador bilineal en el sentido de Grosse-Erdmann y Kim [56] con condiciones iniciales x, y es $\cup_{n \geq 0} M^n(x, y)$ donde $M^0(x, y) = \{x, y\}$ y los n -estados son inductivamente definidos como $M^n(x, y) = M^{n-1}(x, y) \cup \{M(z, w) : z, w \in M^{n-1}(x, y)\}$. Un operador bilineal se dice *bihipercíclico* si la órbita con condiciones iniciales x, y , $\cup_{n \in \mathbb{N}_0} M^n(x, y)$ es densa en X .

Como en el caso de los polinomios homogéneos y operadores multilineales en el sentido de Bès y Conejero hay una noción de bola límite: si $x, y \in \frac{1}{\|M\|} B_X \times \frac{1}{\|M\|} B_X$, entonces $M^n(x, y) \subseteq \frac{1}{\|M\|} B_X$. Más aún, en dicho caso la órbita tiende a cero, i.e. para todo abierto U alrededor del cero existe un n_0 tal que $M^n(x, y) \subseteq U$ para todo $n \geq n_0$. Luego, el conjunto de vectores bihipercíclicos no es residual. A pesar de este hecho restrictivo, en [56] los autores observaron que si T es un operador hipercíclico y x^* es un funcional no nulo entonces el operador bilineal $x^* \otimes T$ es bihipercíclico, y luego hay operadores bilineal bihipercíclicos en espacios arbitrarios de Banach de dimensión infinita y separables. También lograron probar que hay operadores bilineales bihipercíclicos en el caso finito dimensional. Sin embargo, no es sabido si el operador se puede tomar simétrico y la siguiente pregunta fue establecida (ver [56, p. 708]).

Pregunta A. *Sea X un espacio de Banach separable ¿ Existe un operador bilineal bihipercíclico que sea simétrico?*

Vamos a probar en esta sección que en todo espacio de Banach que sea separable y de dimensión infinita existen operadores bilineales bihipercíclicos y simétricos. El argumento principal para obtener operadores bilineales bihipercíclicos en [56] es construir un operador bilineal M tal que $T(\cdot) = M(\cdot, y)$ es un operador lineal hipercíclico para algún $y \in X$, porque en este caso la órbita de x vía T está contenida en la órbita de (x, y) vía M , y luego se sigue que M es

bihipercíclico. Seguiremos una aproximación distinta y vamos a estudiar la órbita del polinomio homogéneo inducido por M . A pesar de que los polinomios homogéneos en espacios de Banach no son hipercíclicos podemos lograr que $\overline{\{M(P^n(x), P^m(x)) : n, m \in \mathbb{N}\}} = X$. La estructura de la prueba será la misma que usamos para probar los Teoremas 4.2.3 y 2.4.4. Vamos a buscar un operador bilineal bihipercíclico y simétrico M tal que se cuasiconjuga a espacios de Banach separables e infinito dimensionales arbitrarios. Nuestro candidato será la simetrización del polinomio homogéneo 2.4.4, $M(x, y) = \frac{e'_1(x)B_\omega(y) + e'_1(y)B_\omega(x)}{2}$ con pesos $(\omega_n)_n = \frac{1}{n^2}$. Vamos a probar que si P es el polinomio homogéneo inducido por M , $P_\omega(x) = M(x, x) = e'_1(x)B_\omega(x)$, entonces existe un vector x tal que $\overline{\{M(P_\omega^n(x), P_\omega^m(x)) : n, m \in \mathbb{N}\}} = \ell_1$.

Para lograrlo vamos a usar las propiedades del conjunto de Julia estudiado en el capítulo 2.

Recordemos que $P_\omega : J_{P_\omega} \rightarrow J_{P_\omega}$ es hipercíclico (Teorema 2.3.4 junto al Lema 2.3.6) y que si para cada coordenada i tenemos que $|x_i| \geq |y_i|$ e $y \in J_{P_\omega}$ entonces $x \in J_{P_\omega}$. Usaremos también el siguiente lema, el cual es una versión simplificada del Lema 2.3.3. Ver [37] por una prueba directa.

Lema 4.3.1. *Existe un n tal que el vector*

$$(n, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \dots) \in J_{P_\omega}.$$

Demostración. Aplicaremos el Lema 2.3.3 el cual es establecido de la forma $P_v = e'_1 B : \ell_p(v) \rightarrow \ell_p(v)$. Aplicando la conjugación $\Phi : \ell_1 \rightarrow \ell_1(j!^2)$, $\Phi(e_n) \rightarrow \frac{1}{n!^2} e_n$ obtenemos que nuestro polinomio $(P_{\frac{1}{n^2}}, \ell_1)$ es conjugado a $(e'_1 B, \ell_1(n!^2))$. Este polinomio tiene conjunto de Julia no vacío, porque v_n es de orden $p(n)^{q(n)}$ y luego podemos aplicar el Lema 2.3.3. Como el conjunto de Julia se preserva vía isomorfismos lineales es suficiente mostrar que $\Phi(n, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \dots) = (n, \frac{1}{2!^3}, \frac{1}{3!^3}, \dots) \in J_{P_v}$. Está es la conclusión de 2.3.3 aplicado a $m = \frac{3}{2}$. \square

Aplicando estos resultados se deduce fácilmente que M es bihipercíclico.

Teorema 4.3.2. *Sea $M(x, y) = \frac{e'_1(x)B_\omega(y) + e'_1(y)B_\omega(x)}{2}$, donde $[B_\omega(x)]_i = \frac{x_{i+1}}{i^2}$. Entonces M es un operador bilineal bihipercíclico en ℓ_1 .*

Demostración. Por los comentarios anteriores, hay un vector x tal que $\overline{\{P_\omega^n(x) : n \in \mathbb{N}\}} = J_{P_\omega}$, luego es suficiente mostrar que $\overline{M(J_{P_\omega}, J_{P_\omega})} = \ell_1$. Sea $x_0 \in c_{00}$. Por los lemas anteriores y porque J_{P_ω} es completamente invariante, existe $\lambda > 0$ tal que $x = \lambda S_\omega(x_0) + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!^2} e_i + e_1 \in J_{P_\omega}$ and $y = -(\lambda - 2)S_\omega(x_0) - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!^2} e_i + e_1 \in J_P$, donde S_ω es la inversa formal de B_ω . Finalmente,

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \frac{x_1 B_\omega(y) + y_1 B_\omega(x)}{2} = \frac{B_\omega(y) + B_\omega(x)}{2} \\ &= \frac{(\lambda - \lambda + 2)x_0}{2} = x_0. \end{aligned}$$

\square

Con las mismas herramientas usadas en los Teoremas 4.2.3 y 2.4.4 podemos probar lo siguiente.

Teorema 4.3.3. *Sea X un espacio de Banach separable y de dimensión infinita. Entonces existe un operador bilinear bihipercíclico y simétrico $A \in \mathcal{L}_s(^2X)$.*

Demostración. Sean ϕ y N los operadores definidos en la prueba del Teorema 4.2.9 y M el operador bilinear bihipercíclico y simétrico definido en la prueba del Teorema 4.3.2. Entonces, si A es la simetrización de N se sigue que N es cuasiconjugado a M vía el factor ϕ . Por lo tanto, como M es bihipercíclico obtenemos que A también lo es. \square

Capítulo 5

Operadores \mathcal{AP} -hipercíclicos

Durante los últimos años el foco de atención fue puesto en *hiperciclicidad frecuente* [10] y más recientemente en \mathcal{F} -hiperciclicidad [25, 33], para familias \mathcal{F} más grandes de números naturales.

Dada una familia de Furstenberg $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ decimos que un operador es \mathcal{F} -hipercíclico si existe $x \in X$ tal que los tiempos de visita $N_T(x, U) := \{n \in \mathbb{N} : T^n(x) \in U\}$ pertenecen a \mathcal{F} . Luego, por ejemplo, si consideramos $\mathcal{F}_{\neq \emptyset}$, la familia de conjuntos no vacíos, $\mathcal{F}_{\neq \emptyset}$ -hiperciclicidad es simplemente hiperciclicidad y si $\underline{\mathcal{D}}$ denota a la familia de conjuntos con densidad inferior positiva, entonces $\underline{\mathcal{D}}$ -hiperciclicidad se traduce a hiperciclicidad frecuente. Recientemente se han considerado diversas familias de \mathcal{F} -hiperciclicidad como por ejemplo hiperciclicidad \mathcal{U} -frecuente hiperciclicidad [88], hiperciclicidad reiterativa [25] y más recientemente hiperciclicidad síndetica a trozos [80].

En este capítulo introducimos y estudiamos la noción de \mathcal{AP} -hiperciclicidad en conexión a recurrencia múltiple.

Una progresión aritmética de longitud m , paso k y término inicial a es un conjunto de la forma

$$a, a + k, \dots, a + (k - 1)m.$$

Diremos que un conjunto de los números naturales A tiene progresiones aritméticas arbitrariamente grandes ($A \in \mathcal{AP}$) si para todo tamaño m existe una progresión aritmética contenida en A .

El estudio de los conjuntos teniendo progresiones aritméticas arbitrariamente largas (o conjuntos en \mathcal{AP}) ha tenido un gran desarrollo en el último siglo y es un tema central en teoría de números y combinatoria aditiva. Por ejemplo, los celebrados Teoremas de Szemerédi [89] y Green-Tao [52] establecen que los conjuntos con densidad inferior positiva y los conjuntos de números primos pertenecen a \mathcal{AP} .

Este área tiene también una relación intrínseca con teoría ergódica. Un ejemplo de esta relación es la prueba del Teorema de Szemerédi usando el Teorema de recurrencia múltiple de Furstenberg.

En dinámica lineal, la noción de recurrencia múltiple fue considerada por primera vez por Costakis y Parissis [44]. Un operador es (topológicamente) *múltiplemente recurrente* si para todo conjunto abierto U y para todo m existe k tal que $\cap_{i=1}^m T^{-ik}(U) \neq \emptyset$. Esta noción también

fue estudiada en [40, 41, 42], donde los autores dieron ejemplos de operadores múltiplemente recurrentes y en [81] donde el autor estudió la conexión entre recurrencia múltiple e hiperciclicidad reiterativa.

La estructura del capítulo es la siguiente. En la sección 5.1 introducimos la noción de \mathcal{AP} -hiperciclicidad y probamos, entre otros resultados, que la noción es equivalente a que el operador sea múltiplemente recurrente e hipercíclico. Proponemos un criterio simple de \mathcal{AP} -hiperciclicidad y lo usamos para caracterizar a los operadores coshift sobre espacios de Schauder que son \mathcal{AP} -hipercíclicos. Responemos una pregunta Costakis and Parissi probando que todo espacio de Banach, separable y de dimensión infinita, admite un operador \mathcal{AP} -hipercíclico (y luego múltiplemente recurrente). Finalmente mostramos un ejemplo de un operador que es \mathcal{AP} -hipercíclico pero no weakly mixing.

Los contenidos de este capítulo están basados en el trabajo [36].

5.1. Operadores \mathcal{AP} -hipercíclicos y recurrencia múltiple

Un operador se dice múltiplemente recurrente si para cada abierto U y todo m existe k tal que

$$U \cap T^{-k}(U) \cap \dots \cap T^{-km}(U) \neq \emptyset.$$

La motivación proviene del celebrado Teorema de recurrencia múltiple de Furstenberg el cual establece que si T preserva medida entonces para cada abierto U de medida positiva y todo m vale que existe k tal que

$$\mu(U \cap T^{-k}(U) \cap \dots \cap T^{-km}(U)) > 0.$$

Operadores múltiplemente recurrente fueron considerados por primera vez por Costakis y Parissis en [44]. En esta sección estudiaremos recurrencia múltiple desde el punto de vista de \mathcal{F} -hiperciclicidad: mostraremos que \mathcal{AP} -hiperciclicidad es equivalente a recurrencia múltiple más hiperciclicidad. Recordemos que \mathcal{AP} denota a la familia de conjuntos que contienen progresiones aritméticas arbitrariamente grandes. Es una familia de tipo upper, y luego por el Teorema 1.2.25 tenemos lo siguiente.

Proposición 5.1.1. *Sea T un operador lineal en un espacio de Fréchet separable. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. T es hipercíclicos y todo vector hipercíclico es \mathcal{AP} -hipercíclico.
2. Existe $x \in X$ tal que para todo abierto U , $N_T(x, U) \in \mathcal{AP}$.
3. T es hipercíclico y múltiplemente recurrente.
4. Para cada par de abiertos U, V y todo $m > 0$ existe $x \in U$ tal que $N_T(x, V)$ tiene una progresión aritmética de longitud m .
5. El conjunto de vectores \mathcal{AP} -hipercíclicos es residual.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) y 5) \Rightarrow 2) son triviales; además 4) \Rightarrow 5) es una consecuencia directa del Teorema 1.2.25.

3) \Rightarrow 1). Sea x un vector hipercíclico y U un abierto no vacío. Sea $m > 0$. Luego, existe k_2 tal que $V := U \cap T^{-k_2}(U) \cap \dots \cap T^{-k_2 m}(U) \neq \emptyset$ y entonces $N(x, V) \neq \emptyset$. Si $k_1 \in N(x, V)$ se deduce que para todo $j \leq m$, $T^{k_1 + j k_2}(x) \in U$ para todo $j \leq m$. \square

En [44], los autores mostraron un ejemplo de un operador coshift pesado en ℓ_p que es hipercíclico (y luego weakly mixing) pero no múltiplemente recurrente y un operador coshift en $\ell_p(\mathbb{Z})$ que es múltiplemente recurrente e hipercíclico pero no frecuentemente hipercíclico. Como para operadores coshift hiperciclicidad frecuente e hiperciclicidad reiterada son equivalentes [25], se sigue que weakly mixing no implica \mathcal{AP} -hiperciclicidad y que \mathcal{AP} -hiperciclicidad no implica hiperciclicidad reiterada. Vamos a ver en el Teorema 5.1.17 que existen operadores \mathcal{AP} -hiperciclicidad que no son weakly mixing.

Por otro lado, todo operador caótico es \mathcal{AP} -hipercíclico. Más aún, \mathcal{AP} -hipercíclicidad es implicado también por hipercíclicidad reiterada. Esto se deduce por una aplicación del Teorema de Szemerédi [89]: todo conjunto de números naturales con densidad superior de Banach positiva tiene progresiones aritméticas arbitrariamente grandes.

Proposición 5.1.2. *Sea T un operador reiteradamente hipercíclico. Entonces T es \mathcal{AP} -hipercíclico.*

Hay muchos ejemplos de operadores múltiplemente recurrentes que no son hipercíclicos. Por ejemplo, cualquier raíz de la identidad. Exhibimos aquí un ejemplo no trivial de un operador que es múltiplemente recurrente y no hipercíclico (y luego no \mathcal{AP} -hipercíclico).

Consideremos $X = H(\mathbb{C})$ y $T_a(f)(z) = f(a \cdot z + b)$. Es sabido que T_a es hipercíclico si y sólo si $a = 1$ y $b \neq 0$ y que T_a es recurrente si y sólo si $|a| = 1$ (Ver [50] y [43, Theorem 6.4]).

Ejemplo 5.1.3. Sea $X = H(\mathbb{C})$ y $T_a(f)(z) = f(az + b)$. Entonces T_a es recurrente múltiple si y sólo si $|a| = 1$.

Demostración. Seguimos las ideas de [43]. Si T_a es múltiple recurrente entonces es en particular recurrente y luego $|a| = 1$.

Recíprocamente supongamos que $|a| = 1$. Sea $f \in H(\mathbb{C})$. Dado $R > 0, \epsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ debemos encontrar g y k tal que $\|f - T^{jk}(g)\|_R < \epsilon$ para todo $0 \leq j \leq m$.

Por la uniforme continuidad de f en un conjunto compacto existe $\delta > 0$ tal que

$$|z - z'| < \delta \text{ implica } |f(z) - f(z')| < \epsilon \text{ para todo } z \in D\left(0, R + \frac{2b}{|a-1|}\right). \quad (5.1)$$

Tenemos la siguiente dicotomía: O bien a es una raíz de la unidad o $\{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en \mathbb{T} . En ambos casos, existen k y N tal que $|a^{jk+N} - 1| < \delta(R + \frac{b}{a-1})^{-1}$ para todo $0 \leq j \leq m$. Sea $g = T^N(f)$. Tenemos que para todo $z \in B(0, R)$ y $j \leq m$, que

$$|a^{jk+N}z - z + \frac{a^{jk+N} - 1}{a-1}b| = |(a^{jk+N} - 1)(z + \frac{b}{a-1})| \leq \delta.$$

Luego, por (5.1),

$$|T^{jk+N}(f)(z) - f(z)| = |f(a^{jk+N}z + \frac{a^{jk+N} - 1}{a-1}b) - f(z)| < \epsilon$$

para todo $z \in D(0, R)$ y $j \leq m$. □

Un problema clásico en \mathcal{F} -hipercíclicidad es decidir si T^{-1} y T^p son \mathcal{F} -hipercíclicos sabiendo que T es \mathcal{F} -hipercíclico. Para \mathcal{AP} -hipercíclicidad tenemos una respuesta sencilla.

Proposición 5.1.4. *Sea T un operador \mathcal{AP} -hipercíclico inversible en un espacio de Fréchet space. Entonces T^{-1} es \mathcal{AP} -hipercíclico.*

Demostración. Debido a que T es hipercíclico se sigue que T^{-1} es hipercíclico. Sean $m \in \mathbb{N}$ y U conjuntos abiertos. Como T es \mathcal{AP} -hipercíclico existen $x \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{jn}x \in U$ para todo $j \leq m$. Sea $y = T^{mn}(x)$. Se sigue que $T^{-jn}(y) = T^{(m-j)n}(x) \in U$ para todo $0 \leq j \leq m$. □

Proposición 5.1.5 (Propiedad de Ansari). *Sea T un operador \mathcal{AP} -hipercíclico en un espacio de Fréchet. Entonces T^p es \mathcal{AP} -hipercíclico.*

Demostración. Como T es hipercíclico, se deduce por el Teorema de Ansari que T^p es hipercíclico. Por la Proposición 5.1.1 es suficiente mostrar que para todo abierto U y para todo $m \in \mathbb{N}$ existen x y $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{jnp}(x) \in U$ para todo $j \leq m$. Como T es \mathcal{AP} -hipercíclico, aplicando otra vez la Proposición 5.1.1, existe $x \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{jn}(x) \in U$ para todo $j \leq pm$. En particular $T^{jpn}(x) \in U$ para todo $j \leq m$. \square

Notemos que por la Proposición 5.1.1 todo vector hipercíclico de un operador \mathcal{AP} -hipercíclico es un vector \mathcal{AP} -hipercíclico y que por el Teorema de Ansari los vectores hipercíclicos de T y T^p coinciden. Concluimos que todo vector hipercíclico de T tiene que ser un vector \mathcal{AP} -hipercíclico de T^p .

La herramienta más efectiva para probar que un operador es hipercíclico es mostrar que satisface el criterio de hiperciclicidad. Generalizamos el criterio a \mathcal{AP} -hiperciclicidad.

Notemos que una progresión aritmética cuyo término inicial coincide con el paso no es otra cosa que un conjunto de la forma $\{q, 2q, \dots, mq\}$ para algunos $q, m \in \mathbb{N}$.

Definición 5.1.6. *Diremos que un operador T satisface el criterio de \mathcal{AP} -hiperciclicidad si existen conjuntos densos $X_0 \subseteq X$, una función $S : X_0 \rightarrow X_0$ y una sucesión $(m_k)_k \in \mathcal{AP}$, que contiene progresiones aritméticas arbitrariamente grandes cuyo término inicial coincide con el paso tal que para cada $x \in X_0$,*

1. $T^{m_k}(x) \rightarrow 0$;
2. $S^{m_k}(x) \rightarrow 0$ y
3. $TS(x) = x$.

En [19, 27], los autores introdujeron la noción de d -hiperciclicidad para operadores. Es claro que si la tupla (T, T^2, \dots, T^m) es d -hipercíclica para todo m entonces T es \mathcal{AP} -hipercíclico. Más aún, si T satisface el criterio de \mathcal{AP} -hiperciclicidad entonces (T, T^2, \dots, T^m) satisface el criterio de d -hiperciclicidad para todo m (ver [27, Section 2]) y luego la tupla (T, T^2, \dots, T^m) es d -hipercíclica para todo m . Luego tenemos lo siguiente.

Proposición 5.1.7. *Sea X un espacio de Fréchet separable. Si T satisface el criterio de \mathcal{AP} -hiperciclicidad entonces T es \mathcal{AP} -hipercíclico.*

Recordemos que un operador satisface el criterio de Kitai fuerte si satisface el criterio anterior para la sucesión de número naturales.

Corolario 5.1.8. *Todo operador que satisface el criterio fuerte de Kitai es \mathcal{AP} -hipercíclico.*

Mostraremos en el Teorema 5.1.17 que existen operadores \mathcal{AP} -hipercíclico que no son weakly mixing. Luego, existen operadores \mathcal{AP} -hipercíclicos que no satisfacen el criterio de \mathcal{AP} -hiperciclicidad.

5.1.1. Operadores coshift \mathcal{AP} -hipercíclicos

En [44] los autores caracterizaron los operadores coshift en $\ell_2(\mathbb{Z})$ que son múltiplemente recurrentes. También mostraron que los operadores coshift pesados que son recurrentes son además hipercíclicos. Luego se sigue que todo operador coshift en $\ell_2(\mathbb{Z})$ que es múltiple recurrente es de hecho \mathcal{AP} -hipercíclico. Extenderemos este resultado a operadores coshifts pesados en espacios de Fréchet actuando en una base de Schauder. Para ello vamos a aplicar el criterio de \mathcal{AP} -hiperciclicidad.

Lema 5.1.9. *Sea $(n_k)_k \in \mathcal{AP}$ con la propiedad de que dados $p, m \in \mathbb{N}$ existe $q \in \mathbb{N}$ tal que la progresión aritmética de tamaño, paso q y término inicial $p + q$ está contenida en $(n_k)_k$. Sea además una sucesión x_{n_k} tal que $x_{n_{k-j}} \rightarrow 0$ para todo $j \geq 0$. Entonces existe una sucesión $(m_k)_k$ en \mathcal{AP} , que contiene progresiones aritméticas arbitrariamente grandes cuyo término inicial coincide con el paso y tal que $x_{m_k+j} \rightarrow 0$ para todo j .*

Demostración. Sea $\|\cdot\|$ la F -norma de X . Para cada m existe una progresión aritmética de longitud m paso q_m y término inicial $m + q_m$ tal que $\|x_{lq_m+m-j}\| < \frac{1}{m}$ para todo $0 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq m$. Luego, $\|x_{lq_m+j}\| < \frac{1}{m}$ para todo $0 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq m$.

Sea $(m_k)_k$ la sucesión formada por $\bigcup_m \{lq_m : 1 \leq l \leq m\}$. Entonces $(m_k)_k$ pertenece a \mathcal{AP} , tiene progresiones aritméticas cuyo término inicial coincide con el paso y cumple que $\|x_{m_k+j}\| \rightarrow 0$ para todo j . \square

Teorema 5.1.10. *Sea X un espacio de Fréchet separable con base de Schauder $\{e_n\}$ y supongamos que $B(e_{n+1}) = e_n$ es un operador coshift bien definido. Los siguientes son equivalentes:*

- i) B es \mathcal{AP} -hipercíclico;
- ii) B es múltiplemente recurrente;
- iii) $e_{n_k} \rightarrow 0$ para alguna sucesión $(n_k)_k \in \mathcal{AP}$ con la siguiente propiedad: dados $p, m \in \mathbb{N}$ existe $q \in \mathbb{N}$ tal que la progresión aritmética de longitud m , paso q y término inicial $p + q$ está contenida en $(n_k)_k$;
- iv) B satisface el criterio de \mathcal{AP} -hiperciclicidad.

Demostración. Sea $\|\cdot\|$ la F -norma de X .

i) \Rightarrow ii) se deduce de la definición.

ii) \Rightarrow iii). Supongamos que B es múltiplemente recurrente. Es suficiente mostrar que para cada $\epsilon > 0$, y cada $p, m \in \mathbb{N}$ existe q tal que $\|e_{jq+p}\| < \epsilon$ para todo $1 \leq j \leq m$.

Como $\{e_n\}$ es una base de Schauder, existe $\delta > 0$ tal que $\|x - e_p\| < \delta$ implica $\|x_n e_n\| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \neq p$ y $|x_p| > \frac{1}{2}$. Como B es múltiplemente recurrente, existe q y x tal que $\|x - e_p\| < \delta$ y $\|B^{jq}(x) - e_p\| < \delta$ para todo $1 \leq j \leq m$. Luego, $\|x_n e_n\| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \neq p$ y $|B^{jq}(x)_p| = |x_{jq+p}| > \frac{1}{2}$ para todo $0 \leq j \leq m$. Se sigue que $\|e_{jq+p}\| < \epsilon$ para todo $1 \leq j \leq m$.

iii) \Rightarrow iv). Sean $X_0 = \text{span}(e_n : n \in \mathbb{N})$ y S el operador schift definido en X_0 . Tenemos que $B^n(x) \rightarrow 0$ para todo $x \in X_0$ y que $BS(x) = x$. Resta encontrar una sucesión $(m_k)_k \in \mathcal{AP}$ con

progresiones arbitrariamente largas de la forma $\{q, 2q, \dots, mq\}$ tal que $S^{mq}(x) \rightarrow 0$ para todo $x \in c_{00}$.

Como $e_{n_k} \rightarrow 0$ tenemos que $e_{n_k-j} = B^j(e_{n_k}) \rightarrow 0$ para todo j . Luego, por el Lema 5.1.9, existe una sucesión $(m_k)_k \in \mathcal{AP}$ con la propiedad requerida tal que $e_{m_k+j} = S^{m_k}(e_j) \rightarrow 0$ para todo j .

iv) \Rightarrow i) se sigue de la Proposición 5.1.7. □

Aplicando un argumento de cuasiconjugación obtenemos un resultado análogo para operadores coshift pesados.

Corolario 5.1.11. *Sea X un espacio de Fréchet pesado con base de Schauder $\{e_n\}$ y supongamos que $B_\omega(e_{n+1}) = \omega_n e_n$ es un operador coshift pesado bien definido y continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- i) B_ω es \mathcal{AP} -hipercíclico;
- ii) B_ω es múltiplemente recurrente;
- iii) $\prod_{l=1}^{n_k} \omega_l^{-1} e_{n_k} \rightarrow 0$ para alguna sucesión con la siguiente propiedad $(n_k)_k \in \mathcal{AP}$: dados $p, m \in \mathbb{N}$ existe $q \in \mathbb{N}$ tal que la progresión aritmética de longitud m , paso q y término inicial $p + q$ está contenida en $(n_k)_k$;
- iv) B_ω satisface el criterio de \mathcal{AP} -hipercíclicidad.

Como un operador coshift en un espacio de Fréchet es mixing si y sólo si $e_n \rightarrow 0$ y todo operador coshift hipercíclico es weakly mixing tenemos que todo operador coshift que es mixing es también \mathcal{AP} -hipercíclico y que todo operador coshift que es \mathcal{AP} -hipercíclico es weakly mixing.

5.1.2. Existencia de operadores \mathcal{AP} -hipercíclicos

Ansari y Bernal [2, 18] probaron independientemente que todo espacio de Banach separable y de dimensión infinita admite un operador hipercíclico. Más tarde, Bonet y Peris generalizaron el resultado a espacios de Fréchet [31]. Seguiremos la misma estrategia para probar que todo espacio de Fréchet admite un operador \mathcal{AP} -hipercíclico. Probaremos primero que todo operador $T = I + B$ es \mathcal{AP} -hipercíclico en $\ell_1(v)$ y luego aplicaremos un argumento de cuasiconjugación. Esto responde en particular una pregunta de Costakis-Parissis [44, Question 7.1]. Notemos que a pesar de ser mixing, [53], $T = I + B$ no satisface necesariamente el criterio fuerte de Kitai [87] y luego no podemos aplicar el Corolario 5.1.8.

Teorema 5.1.12. *Sea $X = \ell_1(v)$ y $T = I + B$. Entonces T es \mathcal{AP} -hipercíclico.*

El eslabón clave para probar que T es mixing es el siguiente Lema [84, Lemma 3.2].

Lema 5.1.13 (Salas). *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $C_n \in \mathbb{C}^{k \times k}$, $(C_n)_{i,j} = \binom{n}{k+j-i}$. Para $1 \leq i \leq k$, sea $b_i(n)$ un polinomio en n de grado a lo sumo $k - i$. Entonces existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ existe $x_i(n)$ tal que $C_n(x_1(n), \dots, x_k(n))^t = (b_1(n), \dots, b_k(n))^t$ y $|x_i(n)| \leq \frac{P}{n^i}$, donde P es una constante independiente de n .*

En los próximos lemas usaremos la siguiente notación. Sean k, m fijos y $1 \leq i \leq km$. Definimos $1 \leq p_i \leq m$ como el único número natural tal que $(p_i - 1)k \leq i \leq p_i k$. Luego, si pensamos $\{1, \dots, mk\}$ como la unión de m bloques de longitud k , entonces p_i indica el índice del bloque al cual i pertenece.

Lema 5.1.14. Sean $k, m \in \mathbb{N}$. Sea $C \in \mathbb{K}^{mk \times mk}$ definida como $C_{i,j} = \frac{1}{(p_i k + j - i)!} p_i^{p_i k + j - i}$,

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{k!} & \frac{1}{(k+1)!} & \cdots & \frac{1}{((m+1)k-1)!} \\ \frac{1}{(k-1)!} & \cdots & \cdots & \frac{1}{((m+1)k-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(mk)!} \\ \frac{2^k}{k!} & \frac{2^{k+1}}{k+1!} & \cdots & \frac{2^{(m+1)k-1}}{((m+1)k-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{2}{1!} & \frac{2^2}{2!} & \cdots & \frac{2^{mk}}{(mk)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{m}{1!} & \frac{m^2}{2!} & \cdots & \frac{m^{mk}}{(mk)!} \end{pmatrix}.$$

Entonces C es inversible.

Demostración. Sea V el subespacio mk -dimensional de $\mathbb{K}[x]$ con base $\{\frac{x^k}{k!}, \dots, \frac{x^{(m+1)k-1}}{(m+1)k-1}\}$. Consideramos $T : V \rightarrow \mathbb{K}^{mk}$ definido como

$$T(P) = \left(P(1), P'(1), \dots, P^{(k-1)}(1), P(2), \dots, P^{(k-1)}(2), \dots, P(m), \dots, P^{(k-1)}(m) \right)$$

que es claramente un isomorfismo. La prueba finaliza observando que la matriz asociada a T es precisamente C . \square

El siguiente resultado es una generalización del Lema de Salas. Cuando $m = 1$ obtenemos el Lema 5.1.13.

Lema 5.1.15. Sean $m, k \in \mathbb{N}$ y consideremos $C_n \in \mathbb{C}^{mk \times mk}$ la matriz definida como

$$(C_n)_{i,j} = \begin{pmatrix} p_i \cdot n \\ p_i \cdot k + j - i \end{pmatrix},$$

donde $(p_i - 1)k < i \leq p_i k$. Luego,

$$C_n = \begin{pmatrix} \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} & \cdots & \binom{n}{mk+k-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{mk} \\ \binom{2n}{k} & \binom{2n}{k+1} & \cdots & \binom{2n}{mk+k-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{2n}{1} & \cdots & \cdots & \binom{2n}{mk} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{mn}{1} & \cdots & \cdots & \binom{mn}{mk} \end{pmatrix}.$$

Para $1 \leq i \leq mk$, sea $b_i(n)$ un polinomio en n de grado a lo sumo $p_i k - i$.

Entonces para n grande existe $x_i(n)$ tal que $C_n(x_1(n), \dots, x_{mk}(n))^t = (b_1(n), \dots, b_{mk}(n))^t$ y $|x_i(n)| \leq \frac{M}{n^i}$, donde M es una constante independiente de n .

Demostración. Afirmamos que $\det(C_n)$ es un polinomio en n de grado $m(m+1)k^2/2$. En efecto,

$$\det(C_n) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \prod_{l=1}^{mk} \binom{p_l \cdot n}{p_l \cdot k + \sigma(l) - l}.$$

Cada sumando es un polinomio en n de grado $\sum_l p_l \cdot k + \sigma(l) - l = \sum_{l=1}^m lk^2 = m(m+1)k^2/2$.

El coeficiente principal de cada sumando es $(-1)^{\sigma} \prod_{l=1}^{mk} \frac{p_l^{p_l \cdot k + \sigma(l) - l}}{p_l^{p_l \cdot k + \sigma(l) - l}}$. Luego el coeficiente principal de $\det(C_n)$ es $\sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \prod_{l=1}^{mk} \frac{p_l^{p_l \cdot k + \sigma(l) - l}}{p_l^{p_l \cdot k + \sigma(l) - l}}$ que es el determinante de la matriz definida en el lema anterior, y luego distinto de cero.

Sea C_n^j la matriz que se obtiene después de reemplazar la j -ésima columna de C_n por $(b_1(n), \dots, b_{mk}(n))^t$. Luego,

$$\det(C_n^j) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} b_{\sigma^{-1}(j)}(n) \prod_{l \neq \sigma^{-1}(j)} \binom{p_l \cdot n}{p_l \cdot k + \sigma(l) - l}.$$

Notamos que cada sumando es un polinomio en n de grado a lo sumo $m(m+1)k^2/2 - j$. En efecto,

$$\begin{aligned} \deg \left(b_{\sigma^{-1}(j)}(n) \prod_{l \neq \sigma^{-1}(j)} \binom{p_l \cdot n}{p_l \cdot k + \sigma(l) - l} \right) &= m(m+1)k^2/2 - (p_{\sigma^{-1}(j)} \cdot k + j - \sigma^{-1}(j)) + \deg(b_{\sigma^{-1}(j)}(n)) \\ &\leq m(m+1)k^2/2 - j. \end{aligned}$$

Aplicando la regla de Cramer tenemos que $x_j = \frac{\det(C_n^j)}{\det(C_n)}$ y obtenemos el resultado deseado. \square

Prueba del Teorema 5.1.12. Por la Proposición 5.1.1 es suficiente mostrar que para todo abierto U y todo $m > 0$ existe n y $x \in U$ tal que $T^{ln}(x) \in U$ para todo $l \leq m$.

Sea U un conjunto abierto, $m > 0$ y $x \in U$ con $\text{supp}(x) \subseteq [1, k]$. Vamos a encontrar $n \geq k$ y z , $\text{supp}(z) \subseteq [k+1, (m+1)k]$ tal que $T^{ln}(x+z) \in U$ para todo $1 \leq l \leq m$.

Sea l fijo. Notemos que $[T^{ln}(x+z)]_i = \sum_{j=0}^{ln} \binom{ln}{j} [B^j(x+z)]_i = \sum_{j=0}^{k-i} \binom{ln}{j} x_{i+j} + \sum_{j=k-i+1}^{(m+1)k-i} \binom{ln}{j} z_{i+j}$. Luego el sistema de ecuaciones $[T^{ln}(x+z)]_i = x_i$, $1 \leq i \leq k$ y $\text{supp}(z) \subseteq [k+1, (m+1)k]$ es equivalente a resolver $D_l \cdot B^k z = b_i^l(n)$, donde $(D_l)_{i,j} = \binom{ln}{k+j-i} = \binom{ln}{lk+j-(i+(l-1)k)}$, para $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq mk$ y $b_i^l(n) = x_i - \sum_{j=i}^k \binom{ln}{j-i} x_j$ es un polinomio de grado a lo sumo $k-i$ en n .

Aplicando el lema de arriba a la matriz $C = [D_1^t, \dots, D_m^t]^t$, obtenemos para todo $n \geq n_0$ una solución común z para el sistema de ecuaciones $[T^{ln}(x+z)]_i = x_i$, para $1 \leq i \leq k$, $1 \leq l \leq m$ y $\text{supp}(z) \subseteq [k+1, (m+1)k]$ tal que $|z_i| \leq \frac{M}{n^{i-k}}$, para $k+1 \leq i \leq (m+1)k$.

Cuando calculamos $[T^{ln}(x+z) - x]_i$ para $i \geq k+1$ obtenemos que

$$|[T^{ln}(x+z) - x]_i| = \left| \sum_{j=0}^{ln} \binom{ln}{j} z_{i+j} \right| \leq \sum_{j=0}^{(m+1)k-i} \binom{ln}{j} \frac{M}{n^{i+j-k}} \leq \sum_{j=0}^{(m+1)k-i} \frac{(ln)^j}{j!} \frac{M}{n^{i+j-k}} \leq \frac{Me^l}{n^{i-k}}.$$

Concluimos que para n grande, $T^{ln}(x+z) \in U$ para todo $1 \leq l \leq m$. \square

Es sabido que todo espacio separable de Fréchet existe un operador S que es cuasiconjugado a $T = I + B_\omega$ en ℓ_1 [31]. En consecuencia obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.1.16. *Sea X un espacio de Fréchet separable y de dimensión infinita. Existe entonces un operador \mathcal{AP} -hipercíclico actuando en X .*

5.1.3. Un operador \mathcal{AP} -hipercíclico que no es weakly mixing

En 2006 De la Rosa y Read resolvieron uno de los problemas más importantes en la teoría de los sistemas dinámicos lineales: construyeron un operador hipercíclico que no es weakly mixing o equivalentemente que no satisface el criterio de hiperciclicidad [45]. El criterio de hiperciclicidad tiene muchas reformulaciones equivalentes y usualmente es implicado por una condición regular. Por ejemplo, los operadores caóticos y reiterativamente hipercíclicos son weakly mixing. Sería entonces razonable esperar que \mathcal{AP} -hiperciclicidad implique weakly mixing.

Por otro lado Bayart y Matheron construyeron ejemplos de operadores hipercíclicos no weakly mixing en espacios de Banach clásicos, como por ejemplo $\ell_p, c_0, H(\mathbb{C})$ [12]. También estudiaron clases de operadores no weakly mixing pero teniendo un nivel alto nivel de órbitas frecuentes en [14], y probaron que si $(m_k)_k$ satisface que $\lim_k \frac{m_k}{k} = +\infty$ entonces existe un operador hipercíclico que no es weakly mixing en ℓ_1 pero que satisface que para todo conjunto abierto U , el conjunto de recurrencia $N_T(x, U)$ es $O((m_k)_k)$. Notar que este resultado es ajustado ya que si $(m_k)_k$ fuese acotada entonces tal T sería frecuentemente hipercíclico y luego weakly mixing.

Veremos a continuación que este resultado junto a las cotas superiores cuantitativas conocidas para el Teorema de Szemerédi implican que hay operadores \mathcal{AP} -hipercíclicos que no son weakly mixing.

Teorema 5.1.17. *Existe un operador \mathcal{AP} -hipercíclico en ℓ_1 que no es weakly mixing.*

Demostración. Sea $f(t) := t\sqrt{2}^{-\sqrt{\log \log \log t}}$, donde \log es el logaritmo en base 2, y $m_l = [f^{-1}(l)]$, para $l \in \mathbb{N}$. Entonces como $l \sim m_l \sqrt{2}^{-\sqrt{\log \log \log m_l}}$,

$$\frac{m_l}{l} \sim \frac{m_l}{\frac{m_l}{\sqrt{2}^{\sqrt{\log \log \log m_l}}}} \rightarrow \infty, \quad \text{as } l \rightarrow \infty.$$

Entonces por [14], existen $T \in \mathcal{L}(\ell_1)$ y $x \in \ell_1$ tal que T no es weakly mixing y $N_T(x, U)$ es $O((m_l)_l)$ para todo abierto U .

Probemos que tal operador T tiene que ser \mathcal{AP} -hipercíclico. Sea $r_k(n)$ el máximo de todos los r tal que existe $A \subset \{1 \dots, n\}$ con $|A| = r$ y A no tiene una progresión aritmética de longitud k .

Es sabido [51] que $r_k(n) < \frac{n}{(\log \log n)^{2-2k+9}} - 1$. Tomemos $k(n) = \lceil \log \log \sqrt{\log \log \log n} - 9 \rceil$. Entonces

$$r_{k(n)}(n) + 1 < \frac{n}{(\log \log n)^{2 - \log \sqrt{\log \log \log n}}} = \frac{n}{(\log \log n)^{\frac{1}{\sqrt{\log \log \log n}}}} = \frac{n}{2\sqrt{\log \log \log n}}.$$

Luego, como $l > r_{k(m_l)}(m_l)$, tiene que haber una progresión aritmética de longitud $k(m_l)$ contenida en $\{m_1, m_2, \dots, m_l\}$. Más aún si $(n_l)_l = O((m_l)_l)$ existe una constante $C > 0$ con $n_l \leq C m_l$.

Entonces como $l \sim \frac{m_l}{2\sqrt{\log \log \log \sqrt{m_l}}}$,

$$\frac{r_{k(n_l)}(n_l)}{l} \leq \frac{r_{k(Cm_l)}(Cm_l)}{l} \leq \frac{\frac{Cm_l}{2\sqrt{\log \log \log Cm_l}}}{\frac{\check{C}m_l}{\sqrt{2}\sqrt{\log \log \log m_l}}} < 1,$$

para l suficientemente grande. Luego $\{n_1, n_2, \dots, n_l\}$ contiene una progresión aritmética de longitud $k(n_l)$ para l suficientemente grande. En consecuencia, T es \mathcal{AP} -hipercíclico. \square

Podemos también probar la existencia de operadores \mathcal{AP} -hipercíclicos que no son weakly mixing emulando los argumentos utilizados por Bayart y Matheron. Recordemos brevemente su construcción.

Un vector hipercíclico induce naturalmente un producto en $\text{span}(\text{Orb}_T(x)) = \mathbb{K}[T]x, P(T)(x) \cdot Q(T)(x) = P \cdot Q(T)(x)$.

Criterio 5.1.18. Supongamos que x es un vector hipercíclico y que existe un funcional ϕ tal que $\phi(y \cdot z)$ es continuo restringido a $\mathbb{K}[T](x) \times \mathbb{K}[T](x)$. Entonces el operador no es weakly mixing.

Una manera de producir un operador hipercíclico que no es weakly mixing es construir un operador hipercíclico y un funcional ϕ tal que $\phi(y \cdot z)$ es continuo.

Una de las dificultades que surgen a la hora de verificar el criterio es que usualmente no sabemos que conjunto es $\text{span}(\text{Orb}_T(x))$. Esto lo podemos esquivar imponiendo que $\text{span}(\text{Orb}_T(x)) = c_{00}$.

El operador de Bayart y Matheron's es una perturbación triangular superior de un operador shift pesado en ℓ_1 . Para una sucesión espaciada b_n , una sucesión (a_n) que tiende a cero, pesos w_n y una sucesión densa de polinomios (P_n) a ser definidos, consideraron el operador $T(e_i) = w_i e_{i+1}$ si $b_{k-1} \leq i < b_k - 1$ y $T^{b_k}(e_1) = P_k(T)(e_1) + \frac{e_{b_k}}{a_k}$.

Como T es un operador triangular superior, se sigue que e_1 es un vector cíclico para T y luego $\{P(T)(e_1) : P \text{ es un polinomio}\}$ es denso en ℓ_1 . Luego si $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ y (P_n) es una familia densa de polinomios, se sigue que e_1 es hipercíclico para $\{T^{b_n}\}$. Notemos además que $\text{span}(\text{Orb}_T(e_1)) = c_{00}$.

Los autores eligieron $a_n = n + 1$, $b_n = 3^n$ y $w_n = 4(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}})$. La espaciocidad de la sucesión b_n les permitió probar que, si los polinomios P_n son adecuadamente elegidos, entonces T y ϕ son continuos.

Por supuesto, diferentes elecciones en los parámetros inducen diferentes operadores no weakly mixing.

Sea $b_{n,k} = b_n + kc_n$, donde $0 \leq k \leq n$ y b_n y c_n serán especificados luego. Por ahora requerimos que $c_n \nearrow \infty$ y que

$$2b_{n,n} = 2(b_n + n \cdot c_n) < b_{n+1} = b_{n+1,0}. \quad (5.2)$$

Luego, $b_{n,k} < b_{m,l}$ si $(n,k) < (m,l)$ y $(b_{n,k})_k$ determina una progresión aritmética de longitud $n + 1$ y paso c_n . Intuitivamente un operador no weakly mixing sucede si $N(e_1, U)$ es espaciado.

Cuando construyamos el funcional ϕ (y luego un operador no weakly mixing), vamos a requerir que $c_n \nearrow \infty$ rápidamente.

Algunas veces vamos a abusar de la notación y $b_{n,n+1}$ querrá decir $b_{n+1,0}$ y $b_{n,-1}$ querrá decir $b_{n-1,n-1}$.

Como queremos que e_1 sea un vector \mathcal{AP} -hipercíclico es natural imponer $T^{b_{n,k}}(e_1) = P_{n,k}(T)(e_1) + \frac{e_{b_{n,k}}}{a_{n,k}} = P_n(T)(e_1) + \frac{e_{b_{n,k}}}{a_n}$ para $0 \leq k \leq n$. Vamos a elegir también, $w_n = 4(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}})$, y $a_n = \frac{1}{n}$.

Paso uno. Vamos a buscar condiciones en b_n y P_n para asegurar que T es continuo. La siguiente notación es útil. Diremos que una sucesión de polinomios $(P_n)_n$ está controlada por una sucesión de números naturales u_n si tanto $\deg(P_n)$ como $\|P_n\|_1$ son menores que u_n .

Teorema 5.1.19. *Sea $b_{n,k}$ definida como en (5.2). Entonces existe una sucesión $u_n \rightarrow \infty$ tal que si $(P_n)_n$ está controlada por u_n , entonces T es continuo.*

La gran ventaja de trabajar en ℓ_1 es que es mucho más fácil verificar que un operador es continuo. Por una aplicación trivial de Hölder es suficiente mostrar que el conjunto $\{\|T(e_i)\|\}$ es acotado. Ya sabemos que $\|T(e_i)\| \leq |w_i| \leq 4$ para $i \in [b_{n,k}, b_{n,k+1} - 1]$. Luego, resta mostrar que $T(e_{b_{n,k-1}})$ es acotado. Cuando $k \geq 1$, vamos a explotar el hecho de que $T^{b_{n,k}}(e_1) \sim T^{b_{n,k-1}}(e_1) \sim P_n(T)(e_1)$. Por otro lado cuando calculemos la norma de $\|T(e_{b_{n,-1}})\|$, vamos a explotar la espaciocidad de entre $b_{n-1,n-1}$ y $b_{n,0}$.

Se sigue de un cálculo elemental que $T(e_{b_{n,k}}) = \epsilon_{n,k}e_{b_{n,k}} + f_{n,k}$, donde

$$\begin{aligned} \epsilon_{n,k} &= \frac{a_{n,k-1}}{a_{n,k}w_{b_{n,k-1}+1} \cdots w_{b_{n,k}-1}} \text{ y} \\ f_{n,k} &= \frac{a_{n,k-1}}{w_{b_{n,k-1}+1} \cdots w_{b_{n,k}-1}} \left(P_{n,k}(T)e_1 - T^{b_{n,k}-b_{n,k-1}}P_{n,k-1}(T)e_1 \right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Luego, si $k \geq 1$ tenemos que $b_{n,k} - b_{n,k-1} = c_n$, $P_{n,k} = P_{n,k-1} = P_n$, $a_{n,k} = a_n = \frac{1}{n}$ y entonces

$$\begin{aligned} \epsilon_{n,k} &= \frac{1}{w_{b_{n,k-1}+1} \cdots w_{b_{n,k}-1}} \text{ y} \\ f_{n,k} &= \frac{n}{w_{b_{n,k-1}+1} \cdots w_{b_{n,k}-1}} (P_n(T)e_1 - T^{c_n}P_n(T)e_1) = \frac{n}{w_{b_{n,k-1}+1} \cdots w_{b_{n,k}-1}} P_n(T)(I - T^{c_n})e_1. \end{aligned}$$

Claramente cada $\|\epsilon_{n,k}\| \leq 1$.

La prueba del siguiente Lema es idéntica a la prueba del Lema [13, Lemma 4.20].

Lema 5.1.20. *Supongamos que para todo $(n', k') < (n, k)$, $\|f_{n',k'}\| \leq 1$. Entonces existe una constante absoluta $C > 0$ tal que:*

i) Si $k \geq 1$,

$$\|f_{n,k}\| \leq n4^{d_n} \|P_n\|_1 e^{-C\sqrt{c_n}}.$$

ii) Si $k = 0$,

$$\|f_{n,0}\|_1 \leq n4^{\max\{d_n, d_{n-1}\}+1} \left(\frac{\|P_n\|_1}{2^{b_{n-1}}} + \|P_{n-1}\|_1 e^{-C\sqrt{b_{n-1,n-1}}} \right).$$

Demostración. Probamos únicamente ii), siendo i) más simple y similar a ii). Sea $E_j = \text{span}\{e_1, \dots, e_j\}$. Como $2 < \omega(i)$ tenemos que $\|T(x)\|_1 \leq \omega(j+1)\|x\|_1$ para todo $x \in E_j$ y luego

$$\|T^m(e_1)\|_1 \leq \prod_{i=1}^m \omega_i$$

para todo $1 \leq m \leq b_{n,0}$. Usando la expresión (5.3) obtenemos que

$$\|f_{n,0}\| \leq \frac{n \left(|P_n|_1 \prod_{i=1}^{d_n} \omega(i) + |P_{n-1}| \prod_{i=1}^{b_{n,0}-b_{n,-1}+d_{n-1}} \omega(i) \right)}{\omega_{b_{n,-1}+1} \dots \omega_{b_{n,0}-1}}$$

y como $2 \leq \omega(i) \leq 4$ deducimos que

$$\|f_{n,0}\| \leq \frac{n4^{d_n}|P_n|_1}{2^{b_{n,0}-b_{n,-1}}} + n|P_{n-1}|4^{d_{n-1}} \prod_{i=1}^{b_{n,0}-b_{n,-1}-1} \frac{\omega(i)}{\omega(i+b_{n,-1})}.$$

Para simplificar notación notemos $x = b_{n,0} - b_{n,-1} - 1$. Usando que $\log \frac{1-u}{1-v} \leq v - u$ siempre que $0 \leq v \leq u \leq 1$ y el Teorema de valor medio obtenemos

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^x \frac{\omega(i)}{\omega(i+b_{n,-1})} &\leq \exp \left(\sum_{i=1}^x \frac{1}{2\sqrt{i+b_{n,-1}}} - \frac{1}{2\sqrt{i}} \right) \leq \exp \left(\frac{-1}{4} \sum_{i=1}^x \frac{x}{(x+i)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &\leq \exp \left(\frac{-1}{8} \sum_{i=1}^x \frac{1}{\sqrt{x+i}} \right) = \exp \left(\frac{-1}{8} \sum_{i=x+1}^{2x} \frac{1}{\sqrt{i}} \right) \leq e^{-C\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Utilizando ahora la condición (5.2) tenemos que $x = b_{n,0} - b_{n,-1} - 1 \geq b_{n,-1}$ y luego se sigue ii).

i) Es análogo a ii) notando que en este caso $d_n = d_{n-1}$, $P_n = P_{n-1}$ y $x = c_n$. \square

Prueba del Teorema 5.1.19. Como $c_n \rightarrow \infty$ existe $u_n \rightarrow \infty$ tal que $n4^{u_n}u_n e^{-C\sqrt{c_n}} \leq 1$ y $n4^{\max\{d_n, d_{n-1}\}} \frac{u_n}{2^{b_{n,-1}}} + u_n e^{-C\sqrt{b_{n,-1}}} \leq 1$. Luego, si P_n está controlada por u_n el operador es continuo. \square

Paso dos. Vamos a buscar condiciones en b_n y P_n tal que exista un funcional $\phi : c_{00} \times c_{00} \rightarrow \mathbb{C}$ para el cual $\phi(x \cdot y) = \phi(P \cdot Q(T)e_1)$ es continuo.

El siguiente Criterio fue probado en [13, Lemma 4.22].

Criterio 5.1.21. Supongamos que $\sum_{p,q} |\phi(e_p \cdot e_q)| < \infty$. Entoncse $\phi(x \cdot y)$ es continuo.

Podemos escribir $p = b_{n,k} + u$ y $q = b_{m,l} + v$, donde $b_{n,k} + u < b_{n,k+1}$ y $b_{m,l} + v < b_{m,l+1}$. En este caso obtenemos por la definición de T que

$$\begin{aligned} e_p &= \frac{a_{n,k}}{w_{b_{n,k-1}+1} \dots w_{b_{n,k-1}+u}} (T^{b_{n,k}} - P_n(T))T^u(e_1) \\ e_q &= \frac{a_{m,l}}{w_{b_{m,l-1}+1} \dots w_{b_{m,l-1}+v}} (T^{b_{m,l}} - P_m(T))T^v(e_1). \end{aligned}$$

Luego $|\phi(e_p \cdot e_q)| \leq \frac{n \cdot m}{2^{u+v}} \phi(y_{(n,k,u)(m,l,v)})$, donde

$$y_{(n,k,u)(m,l,v)} = (T^{b_{n,k}} - P_n(T))(T^{b_{m,l}} - P_m(T))T^{u+v}(e_1).$$

Definimos $\phi(e_0) = 1$, y para $i \geq 1$:

$$\phi(T^i(e_0)) = \begin{cases} \phi(P_n(T)T^j(e_0)) & \text{si } i = b_n + kc_n + j \text{ con } j \in [0, c_n) \text{ y } 0 \leq k \leq n, \\ \phi(P_n(T)P_n(T)T^j(e_0)) & \text{si } i = 2b_n + kc_n + j \text{ con } j \in [0, c_n) \text{ y } 0 \leq k \leq 2n, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Imponemos para cada n que

$$(I) \quad b_n > (n+1)c_n,$$

$$(II) \quad b_n > 2b_{n-1} + (2n-1)c_{n-1},$$

$$(III) \quad c_n > 2(b_{n-1} + (n-1)c_{n-1}).$$

Por (I) y (II) vale que ϕ está bien definido. La condición (III) la necesitamos para el siguiente lema.

Lema 5.1.22. *Supongamos que $\deg(P_n) \leq \frac{c_n}{2}$ para todo n y que $n \geq m$. Entonces*

$$i) \quad \phi(y_{(n,k,u)(m,l,v)}) = 0 \text{ para todo } u, v \text{ tal que } u + v < \frac{c_n}{2}.$$

$$ii) \quad |\phi(y_{(n,k,u)(m,l,v)})| \leq M_n(\mathcal{P}) := \max_{1 \leq j \leq n} (1 + \|P_j\|_1)^2 \cdot \prod_{0 \leq j < n+2} \max\{1, \|P_j\|_1^2\}.$$

Prueba de i).

$$\begin{aligned} \phi(y_{(n,k,u)(m,l,v)}) &= \phi(T^{b_n+kc_n+b_m+lc_m+u+v} e_0) - \phi(T^{b_n+kc_n} P_m(T)T^{u+v} e_0) - \phi(T^{b_m+lc_m} P_n(T)T^{u+v} e_0) \\ &\quad + \phi(P_n(T)P_m(T)T^{u+v} e_0) = A + B + C + D. \end{aligned}$$

Supongamos primero que $n = m$. Entonces, como $\deg(P_n) + u + v < c_n$

$$B = -\phi(T^{b_n+kc_n} P_n(T)T^{u+v} e_0) = -\phi(P_n(T)P_n(T)T^{u+v}(e_0)) = C.$$

Por otro lado, como $u + v < \frac{c_n}{2}$ y $k + l \leq 2n$,

$$A = \phi(T^{2b_n+(k+l)c_n+u+v} e_0) = \phi(P_n(T)P_n(T)T^{u+v}(e_0)) = D = -B = -C.$$

Luego $\phi(y_{(n,k,u)(n,l,v)}) = 0$.

Para $n > m$ tenemos por (III) que $b_m + lc_m + u + v < c_n$. Luego,

$$A = \phi(T^{b_n+kc_n+(b_m+lc_m+u+v)} e_0) = \phi(P_n(T)T^{b_m+lc_m+u+v}(e_0)) = -C.$$

Por otro lado, como $\deg(P_m) + u + v < c_n$,

$$B = \phi(T^{b_n+kc_n} P_m(T)T^{u+v} e_0) = \phi(P_n(T)P_m(T)T^{u+v}(e_0)) = -D.$$

Concluimos que, $\phi(y_{(n,k,u)(m,l,v)}) = 0$. □

Prueba de ii). Probamos antes el siguiente hecho: sea $K_n := \prod_{0 \leq j < n} \max\{1, \|P_j\|_1^2\}$, entonces

$$\max_{0 \leq i < b_n} |\phi(T^i(e_0))| \leq K_n \text{ para todo } n.$$

El caso $n = 1$ es trivial. Supongamos que la afirmación es verdadera para $n \geq 1$ y probémoslo para $n + 1$. Notemos que necesitamos acotar $|\phi(T^i e_0)|$ para $b_n \leq i < b_{n+1}$ satisfaciendo $i = b_n + kc_n + j$ con $j < c_n$ y $0 \leq k \leq n$, o $i = 2b_n + kc_n + j$ con $j < c_n$ y $0 \leq k \leq 2n$, ya que en caso contrario $\phi(T^i e_0) = 0$.

Si $i = b_n + kc_n + j$ con $j < c_n$ y $0 \leq k \leq n$, entonces

$$\begin{aligned} |\phi(T^i e_0)| &= |\phi(P_n(T)T^j e_0)| \\ &\leq \|P_n\|_1 \cdot \max\{|\phi(T^l e_0)| : l < c_n + \deg(P_n)\} \\ &\leq \|P_n\|_1 K_n \leq K_{n+1}, \end{aligned}$$

porque $c_n + \deg(P_n) < b_n$ by (I).

Similarmente, si $i = 2b_n + kc_n + j$ con $j < c_n$ y $0 \leq k \leq 2n$,

$$\begin{aligned} |\phi(T^i e_0)| &= \phi(P_n(T)P_n(T)T^j(e_0)) \\ &\leq \|P_n^2\|_1 \cdot \max_{l \leq 2\deg(P_n) + c_n} |\phi(T^l(e_1))| \\ &\leq \|P_n\|_1^2 K_n \leq K_{n+1}. \end{aligned}$$

Como $y_{(n,k,u),(m,l,v)} = R(T)(e_0)$, con $\deg(R) < b_{n,k} + b_{m,l} + u + v < 2b_{n+1} < b_{n+2}$ y $\|R\|_1 \leq (1 + \|P_n\|_1) \cdot (1 + \|P_m\|_1)$, obtenemos que $|\phi(R(T)e_0)| \leq \|R\|_1 \cdot \max_{1 \leq j \leq \deg(R)} |\phi(T^j e_0)| \leq M_n(\mathcal{P})$. \square

Teorema 5.1.23. *Sea $b_{n,k}$ que cumple las condiciones I), II) y III). Entonces existe una sucesión de control $v_n \rightarrow \infty$ tal que si P_n está controlada por v_n entonces $\phi(x \cdot y)$ es continuo.*

Demostración. Como $\sum_m \sum_{n \geq m} n^4 \sum_{i \geq \frac{n}{2}} \frac{i+1}{2^i} < \infty$ existe una sucesión $A_n \nearrow \infty$ tal que

$$\sum_m \sum_{n \geq m} n^4 \cdot A_n \sum_{i \geq \frac{n}{2}} \frac{i+1}{2^i} < \infty.$$

Sea $v_n \rightarrow \infty$ una sucesión de control que garantice que $M_n(\mathcal{P}) \leq A_n$ y tal que $v_n < \frac{c_n}{2}$. Por el Criterio 5.1.21, es suficiente mostrar que

$$\sum_{n,k,m,l,u,v} \left| \frac{n \cdot m}{2^{u+v}} \phi(y_{(n,k,u),(m,l,v)}) \right| < \infty.$$

Notemos que por el Lema 5.1.22 que

$$\begin{aligned} \sum_{n,k,m,l,u,v} \frac{n \cdot m}{2^{u+v}} |\phi(y_{(n,k,u),(m,l,v)})| &\leq 2 \sum_m \sum_{n \geq m} \sum_{k \leq n} \sum_{l \leq m} n \cdot m \cdot M_n \sum_{u+v \geq \frac{n}{2}} \frac{1}{2^{u+v}} \\ &\leq 2 \sum_m \sum_{n \geq m} n^4 M_n \sum_{i \geq \frac{n}{2}} \frac{i+1}{2^i} < \infty. \end{aligned}$$

\square

Paso final: 5.1.17. Sea $b_{n,k}$ que cumple las hipótesis de los Teoremas 5.1.19 y 5.1.23. Aplicando los Teoremas 5.1.19 y 5.1.23 hay un operador continuo T tal que $\phi(x \cdot y)$ es continuo. Por las observaciones anteriores al primer paso el operador es \mathcal{AP} -hipercíclico y por el Criterio 5.1.18 no es weakly mixing.

□

Capítulo 6

Operadores \mathcal{AP}_* -hipercíclicos

La relación entre los operadores caóticos y frecuentemente hipercíclicos no está del todo comprendida. Incluso en espacios de Hilbert existen operadores caóticos que no son frecuentemente hipercíclicos y viceversa, existen operadores frecuentemente hipercíclicos que no son caóticos. Para entender mejor esta relación es deseable obtener una caracterización de caos en términos del comportamiento de una órbita.

Pregunta 6.0.1. *¿Es posible caracterizar a los operadores caóticos en términos del comportamiento de una única órbita?*

En este contexto la siguiente pregunta fue formulada por Bonilla y Grosse-Erdmann. [33].

Pregunta 6.0.2. *¿Existe una familia de Furstenberg \mathcal{F} tal que \mathcal{F} -hiperciclicidad sea equivalente a caos?*

Como vimos en el capítulo anterior, los operadores caóticos son \mathcal{AP} -hipercíclicos. Sin embargo, el concepto de \mathcal{AP} -hiperciclicidad está muy lejos de implicar caos. En efecto, existen operadores \mathcal{AP} -hipercíclicos que no son weakly mixing y todo espacio de Banach separable y de dimensión infinita admite un operador \mathcal{AP} -hipercíclico, hechos que son falsos para operadores caóticos.

Si miramos los tiempos de visita $N_T(U)$ de un operador caótico vemos que tienen progresiones aritméticas arbitrariamente grandes, teniendo además estas progresiones una estructura algebraica grande ya que se pueden considerar todas del mismo paso.

Dado un conjunto A de números naturales diremos que A tiene progresiones aritméticas arbitrariamente grandes con paso fijo (o $A \in \mathcal{AP}_*$) si existe un número fijo k tal que para toda longitud m , A tiene una progresión aritmética de paso k y longitud m .

No hay, hasta donde sabemos, una investigación sistemática sobre conjuntos con progresiones aritméticas arbitrariamente largas de paso fijo. Siendo probablemente la razón que \mathcal{AP}_* no cumple la propiedad de Ramsey: existen conjuntos A_1, \dots, A_N disjuntos dos a dos que no pertenecen a \mathcal{AP}_* cuya unión pertenece a \mathcal{AP}_* . Sin embargo, como veremos, estos conjuntos juegan un rol primordial en la teoría de caos lineal.

Responderemos la Pregunta 6.0.2 para operadores débil*-débil* continuos: tal operador es caótico si y sólo si es \mathcal{AP}_* -hipercíclico (Teorema 6.1.1). Para operadores arbitrarios la familia

\mathcal{AP}_* todavía puede ser usado para caracterizar caos en términos del comportamiento de una órbita: T es caótico si y sólo si existe $x \in X$ tal que para todo abierto U , el conjunto de tiempos de visita $N(x, U)$ contiene una sucesión $(n_k)_k \in \mathcal{AP}_*$ para la cual el conjunto $\{T^{n_k}(x)\}$ es débil precompacto. Como corolario obtenemos un teorema de Transitividad para operadores caóticos (Teorema 6.1.12).

El capítulo está organizado como sigue. En la Sección 6.1 estudiamos a los operadores \mathcal{AP}_* -hipercíclicos, operadores con conjuntos periódicos densos y su conexión con caos. Probamos que estos conceptos son equivalentes para operadores débil*-débil* continuos (Teoremas 6.1.1 y 6.1.10). En la Sección 6.2 probaremos que los operadores \mathcal{AP} -hipercíclicos tienen espectro perfecto (Corolario 6.2.3). En la Sección 6.3 estudiamos a los operadores coshift. Probamos la existencia de un operador coshift en c_0 que es \mathcal{AP}_* -hipercíclico y no caótico. Por otro lado probamos que todo operador coshift actuando sobre una base incondicional tiene conjuntos periódicos densos si y sólo si son caóticos (Teorema 6.3.1).

El contenido de este capítulo está basado en el trabajo [36].

6.1. Operadores \mathcal{AP}_* -hipercíclicos y operadores caóticos

En esta sección estudiaremos a los operadores \mathcal{AP}_* -hipercíclicos y su relación con los operadores caóticos. El resultado principal del capítulo establece que para operadores débil*-débil* continuos un operador es caótico si y sólo si es \mathcal{AP}_* -hipercíclico. Por otro lado, mostraremos en el Teorema 6.3.3 que existen operadores \mathcal{AP}_* -hipercíclicos que no son caóticos.

Teorema 6.1.1. *Sea X un espacio de Banach que es un dual $T : X \rightarrow X$ un operador débil*-débil* continuo. Entonces T es caótico si y sólo si existe $x \in X$ tal que para todo conjunto abierto U existe k tal que el conjunto de tiempos de visita $N_T(x, U)$ contiene progresiones aritméticas arbitrariamente grandes de un mismo paso k .*

Notar que la equivalencia de arriba vale para operadores arbitrarios en espacios reflexivos. El Teorema 6.1.1 es una consecuencia directa del Teorema 6.1.10. Recordemos que un conjunto A de números naturales pertenece a \mathcal{AP}_* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que A admite progresiones aritméticas arbitrariamente grandes de un mismo paso k , y que \mathcal{AP}_* es una familia de Furstenberg upper. La siguiente proposición es análoga a la Proposición 5.1.1.

Proposición 6.1.2. *Sea T un espacio de Fréchet. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- 1) T es hipercíclico y todo vector hipercíclico es \mathcal{AP}_* -hipercíclico.
- 2) Existe un vector \mathcal{AP}_* -hipercíclico.
- 3) Para todo abierto V existe k tal que para todo abierto U y para todo m existen k_m y $x \in U$ con $T^{k_m+jk}(x) \in V$ para todo $0 \leq j \leq m$.
- 4) T es hipercíclico y para todo conjunto abierto U existe k tal que para todo m , $\bigcap_{j=1}^m T^{-jk}(U) \neq \emptyset$.

5) El conjunto de vectores \mathcal{AP}_* -hipercíclicos es residual.

En [75] fue probado que los operadores caóticos son reiterativamente hipercíclicos. La misma prueba muestra el siguiente resultado.

Proposición 6.1.3. *Sea T un operador caótico. Entonces T es \mathcal{AP}_* -hipercíclico.*

Por otro lado, hay subconjuntos de los números naturales (por ejemplo los números libres de cuadrados) que tienen densidad inferior positiva pero no pertenecen a \mathcal{AP}_* . Entonces no podemos concluir que los operadores frecuentemente hipercíclicos sean \mathcal{AP}_* -hipercíclicos. También hay operadores caóticos que no son upper-frecuentemente hipercíclicos [75]. Existen entonces operadores \mathcal{AP}_* -hipercíclicos que no son upper-frecuentemente hipercíclicos. Más aún, como existen operadores frecuentemente hipercíclicos en espacios de Hilbert que no son caóticos [13, Section 6.5], por el Teorema 6.1.1 concluimos que hiperciclicidad frecuente no implica \mathcal{AP}_* -hiperciclicidad.

Debido a que los conjuntos \mathcal{AP}_* tienen densidad superior de Banach positiva y como los operadores reiterativamente hipercíclicos son weakly mixing [25], tenemos que los operadores operadores \mathcal{AP}_* -hipercíclicos son weakly mixing.

Proposición 6.1.4. *Sea T un operador \mathcal{AP}_* -hipercíclico. Entonces T es reiterativamente hipercíclico. En particular T es weakly mixing.*

Para probar el Teorema 6.1.1 necesitamos introducir el concepto de conjuntos periódicos densos, que es una generalización natural de punto periódico. La noción fue introducida por Huan y Ye [63] en el contexto de sistemas dinámicos no lineales sobre conjuntos compactos. Decimos que un conjunto Y es periódico para T si existe $k > 0$ tal que $T^k(Y) \subset Y$.

Definición 6.1.5. *Decimos que una aplicación T tiene conjuntos periódicos densos si para todo conjunto abierto U existe un conjunto cerrado $Y \subseteq U$.*

Proposición 6.1.6. *Un operador T tiene conjuntos periódicos densos si y sólo si para todo conjunto abierto U existe k tal que $\bigcap_{j=1}^{\infty} T^{-jk}(U) \neq \emptyset$.*

En particular si T es hipercíclico con conjuntos periódicos densos entonces T es \mathcal{AP}_ -hipercíclico.*

Demostración. Sea un conjunto abierto U y consideremos un abierto auxiliar $V \subseteq U$ tal que $V \subseteq \bar{V} \subseteq U$. Sea $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} T^{-jk}(V)$. Entonces el conjunto $Y = \overline{\text{Orb}_{T^k}(x)}$ es un conjunto cerrado de U que satisface $T^k(Y) \subset Y$. Recíprocamente dado un conjunto abierto U e $Y \subseteq U$ un conjunto cerrado que es T^k -invariante, todo $x \in Y$ pertenece a $\bigcap_{j=1}^{\infty} T^{-jk}(U)$. \square

En la Subsección 6.3 presentaremos un ejemplo de un operador \mathcal{AP}_* -hipercíclico que no tiene conjuntos periódicos densos.

El siguiente lema, el cual explota tanto la linealidad del espacio como del operador, es un ingrediente importante en la prueba del teorema principal.

Lema 6.1.7. *Sea Y un conjunto k -periódico para un operador T en un espacio de Fréchet X tal que*

- I) Y es débil compacto o
- II) X es un espacio dual, Y es débil*-compacto y T es débil*-débil* continuo.

Entonces existe un vector k -periódico en $\overline{co(Y)}^\tau$, donde τ denota a la topología débil o débil respectivamente.*

Demostración. La prueba es una aplicación elemental del Teorema de punto fijo de Schauder-Tychonoff para espacios topológicos localmente convexos [90].

Sea Y un conjunto k -periódico. Entonces $\overline{co(Y)}^\tau$ es T^k -invariante. Más aún, $\overline{co(Y)}^\tau$ es τ -compacto (usando el Teorema de Krein-Šmulian [67] o [85, Chapter II, 4.3]). Luego, el Teorema de Schauder-Tychonoff nos asegura la existencia de un punto fijo de T^k en $\overline{co(Y)}^\tau$. Este punto es un vector k -periódico de T . \square

Proposición 6.1.8. *Sea T un operador hipercíclico en un espacio de Banach separable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- i) T es \mathcal{AP}_* -hipercíclico.
- ii) Para cada abierto $U \subset X$ hay un conjunto periódico de T^{**} contenido en $\overline{U}^{\circ\omega^*} \subset X^{**}$.
- iii) Para cada abierto no vacío $U \subset X$ existe un k tal que $\bigcap_{j=1}^{\infty} (T^{**})^{-jk} \left(\overline{U}^{\circ\omega^*} \right) \neq \emptyset$.
- iv) La clausura en norma de los puntos periódicos de T^{**} contiene a X .

Entonces $i) \Rightarrow ii) \Leftrightarrow iii) \Leftrightarrow iv)$.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Sea $U \subset X$ un conjunto abierto y $V = B_r(x_0)$ tal que $\overline{V} \subseteq U$, $\overline{V}^{\omega^*} \subset \overline{U}^{\circ\omega^*}$ es un conjunto débil*-compacto en X^{**} . Sea $x \in V$ tal que $N(x, V) \in \mathcal{AP}_*$. Luego, existen $k \in \mathbb{N}$ y una sucesión $(a_n)_n$, tal que $T^{a_n+ik}(x) \in V$ para todo $i \leq n$. Existe un punto límite débil* $y \in \overline{V}^{\omega^*}$ de la sucesión $(T^{a_n}(x))_n$

Sea $Y = \overline{Orb_{(T^{**})^k}(y)}^{\omega^*}$, la clausura débil* de la órbita de y vía $(T^{**})^k$. Este conjunto es claramente $(T^{**})^k$ invariante. Debemos probar entonces que $Y \subseteq \overline{U}^{\circ\omega^*}$. Para esto es suficiente probar que para todo m , $(T^{**})^{km}(y) \in \overline{V}^{\omega^*}$. Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y notemos que como T^{**} es débil*-débil*-continuo vale que $(T^{**})^{km}(y)$ es un punto límite débil* de $((T^{**})^{a_n+km}(x))_n = (T^{a_n+km}(x))_n$. Como para todo $n \geq m$ tenemos que $T^{a_n+km}(x) \in V$, concluimos que $T^{mk}(y) \in \overline{V}^{\omega^*}$.

$ii) \Leftrightarrow iii)$ Se sigue como en la prueba de la Proposición 6.1.6.

$ii) \Leftrightarrow iv)$ Como toda bola de X^{**} centrada en un punto de X contiene un conjunto periódico débil* compacto, la afirmación $iv)$ se sigue del Lema 6.1.7. La recíproca es inmediata. \square

Notemos que, en particular, la proposición de arriba prueba el Teorema 6.1.1 para espacios reflexivos. Veamos ahora como empujar este argumento un poco más.

En [63, Proposición 3.2] Huang y Ye estudiaron la relación entre los sistemas dinámicos en conjuntos compactos con conjuntos periódicos densos y conjuntos $N_f(x, U)$ teniendo progresiones aritméticas arbitrariamente grandes con el mismo paso (ver también [69]). El siguiente lema es una generalización de su resultado para sistemas dinámicos en espacios de dimensión infinita.

Lema 6.1.9. *Sea X un espacio de Banach separable que es un dual y $T : X \rightarrow X$ una aplicación (no necesariamente débil*-débil* continua). Entonces T es \mathcal{AP}_* -hipercíclica si y sólo si T es hipercíclica con conjuntos periódicos densos.*

Demostración. Una implicación es la Proposición 6.1.6. La prueba de la recíproca es similar a la prueba de $i) \Rightarrow ii)$ en la Proposición 6.1.8. □

Podemos probar ahora el teorema principal del capítulo.

Teorema 6.1.10. *Sea X un espacio de Banach que es un espacio dual y $T : X \rightarrow X$ un operador lineal débil*-débil* continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) T es \mathcal{AP}_* -hipercíclico;*
- ii) T es hipercíclico y tiene conjuntos periódicos densos y*
- iii) T es caótico.*

Demostración. $i) \iff ii)$ es el Lema 6.1.9. $iii) \implies ii)$ es inmediato.

Probemos $ii) \implies iii)$. Sea U un conjunto abierto. Debemos probar que T tiene un conjunto periódico en U . Consideremos un abierto auxiliar $V \subseteq U$ tal que V es abierto, convexo, débil*-precompacto y tal que $\bar{V} \subseteq U$. Sea $Y \subseteq V$ un conjunto k -periódico. Entonces por el Lema 6.1.7, T tiene un punto k -periódico en $\overline{co(Y)}^{\omega*} \subset U$. □

De una forma similar tenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.1.11. *Sea X un espacio de Fréchet y T un operador lineal continuo con conjuntos periódicos débil compactos densos. Entonces T tiene puntos periódicos densos.*

Si aplicamos la Proposición 6.1.2 obtenemos un teorema de transitividad para operadores caóticos.

Corolario 6.1.12 (Un teorema de transitividad para operadores caóticos.). *Sea X un espacio de Banach separable que es un espacio dual y sea $T : X \rightarrow X$ un operador débil*-débil* continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- 1. T es caótico;*

2. Para todo abierto V existe k tal que para todo abierto U y todo m hay un $x \in U$ y k_m con $T^{k_m+jk}(x) \in V$ para todo $0 \leq j \leq m$ y

3. T es hipercíclico y para todo abierto U existe k tal que para todo $m \bigcap_{j=1}^m T^{-jk}(U) \neq \emptyset$.

Si el operador no es débil*-débil* continuo aún podemos caracterizar caos en términos del comportamiento de una órbita.

Proposición 6.1.13 (Una caracterización de caos en términos de una órbita). *Sea X un espacio de Fréchet. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. Existe un vector hipercíclico x tal que para todo abierto U existe una sucesión $(a_n)_n \subseteq N_T(x, U) \cap \mathcal{AP}_*$, tal que $(T^{a_n}x)_n$ es débil precompacto.

2. T es caótico.

Demostración. Probamos solamente (1) \implies (2), siendo (2) \implies (1) inmediato.

(1) \implies (2). Por el Corolario 6.1.11, es suficiente mostrar que T tiene conjuntos periódicos débil compactos densos. Sea U un conjunto abierto y $V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ un abierto convexo. Existen $k > 0$ y una sucesión $(k_n)_n$ tal que para cada n $T^{k_n+ik}x \in V$ para todo $i \leq n$ y tal que $K := \{T^{k_n+ik}x : i \leq n\}$ es débil precompacto. Sea y un punto de acumulación débil de $\{T^{k_n}x : n \in \mathbb{N}\} \subset K$. Entonces $y \in \bar{K}^\omega$. Como V es convexo se sigue que $y \in U$. Procediendo como en la prueba del Lema 6.1.9 (pero usando que T es débil-débil continuo) probamos que $Y = \overline{Orb_{T^k}(y)}^\omega$ es un conjunto periódico contenido en U . Más aún, Y es débil compacto, porque $T^{mk}(y) \in \bar{K}^\omega$ para todo m . □

6.2. El espectro de un operador \mathcal{AP}_* -hipercíclico

En esta sección estudiaremos el espectro de los operadores \mathcal{AP}_* -hipercíclicos. Recordemos que se ve muy fácilmente que los operadores caóticos tienen espectro perfecto. Por otro lado en [88], Shkarin presentó un argumento muy ingenioso para probar que los operadores frecuentemente hipercíclicos comparten esta propiedad. Vamos a probar que los operadores \mathcal{AP}_* -hipercíclicos tienen espectro perfecto.

Recordemos que un operador se dice cuasinilpotente si $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$. La prueba del siguiente lema es una modificación leve de un resultado análogo para operadores frecuentemente hipercíclicos (ver [88] o [58, Lemma 9.38]).

Lema 6.2.1. *Sea S un operador, $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ y $U = \{y : \operatorname{Re}(\langle y, x^* \rangle) > 0, \operatorname{Re}(\langle S(y), x^* \rangle) < 0\}$. Supongamos que para algún $x \in U \setminus \ker(x^*)$,*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|N_S(x, U) \cap [0, k]|}{k+1} = \mu > 0. \tag{6.1}$$

Entonces $S - I$ no es cuasinilpotente.

Demostración. Reemplazando x^* por $\frac{x^*}{Re(\langle x, x^* \rangle)}$ podemos suponer que $Re(\langle x, x^* \rangle) = 1$.

Supongamos que $S - I$ es cuasinilpotente. Dado $\varepsilon > 0$, existe una constante $M > 0$ tal que $\|(S - I)^k\| \leq M\varepsilon^k$, para todo k . Luego tenemos para $z \in \mathbb{C}$, y $|z| \leq R$ que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |Re(\langle (S - I)^k x, x^* \rangle)| \left| \frac{z(z-1)\dots(z-k+1)}{k!} \right| &\leq M\|x\|\|x^*\| \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{R(R+1)\dots(R+k-1)}{k!} \\ &= \frac{M\|x\|\|x^*\|}{(1-\varepsilon)^R} \end{aligned}$$

donde usamos el teorema del binomio generalizado.

Esto implica que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Re(\langle (S - I)^k x, x^* \rangle) \frac{z(z-1)\dots(z-k+1)}{k!}$$

define una función entera de tipo exponencial 0, tal que $f(0) = \langle x, x^* \rangle = 1$. Luego, aplicando la fórmula de Jensen, la cantidad de ceros en el disco $\{|z| < R\}$, $n(R)$ está acotada por

$$\frac{\log(M\|x\|\|x^*\|(1-\varepsilon)^{-2R})}{\log 2} = c - 2R \frac{\log(1-\varepsilon)}{\log 2}.$$

Luego, tenemos que

$$\frac{n(k+1)}{k+1} \leq \frac{c}{k+1} - \frac{2(k+1)\log(1-\varepsilon)}{(k+1)\log 2} \rightarrow -\frac{2\log(1-\varepsilon)}{\log 2}.$$

Esto contradice (6.1) ya que ε puede elegirse arbitrariamente cercano a 0, y $|N_S(x, U) \cap [0, k]| \leq n(k+1)$. En efecto, como

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{k=0}^n Re(\langle (S - I)^k x, x^* \rangle) \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \\ &= Re(\langle \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (S - I)^k I^{n-k} x, x^* \rangle) = Re(\langle S^n x, x^* \rangle), \end{aligned}$$

tenemos que $n \in N_S(x, U)$ si y sólo si $f(n) > 0$ y $f(n+1) < 0$. Finalmente, como $f|_{\mathbb{R}}$ toma valores reales, f tiene que tener al menos un cero en cada intervalo $(n, n+1)$. \square

Teorema 6.2.2. *Sea T un operador \mathcal{AP}_* -hipercíclico en un \mathbb{K} -espacio de Banach. Entonces $T - \lambda Id$ no es cuasinilpotente para ningún $|\lambda| = 1$.*

Demostración. Sea $\lambda = e^{2\pi i\theta}$. Supongamos primero que $\theta = \frac{p}{q}$ tiene ángulo racional.

Notemos que si $T - \lambda I$ es cuasinilpotente y $q \in \mathbb{N}$ entonces $(T^{**})^q - \lambda^q I = (T^q)^{**} - I$ es un operador cuasinilpotente en X^{**} . Más aún, no es difícil ver que (como hicimos en la Proposición 5.1.5) si T es \mathcal{AP}_* -hipercíclico entonces también lo es T^q .

Aplicamos el lema de arriba a $S = (T^q)^{**}$. Let $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ y $U = \{y \in X^{**} : Re(\langle y, x^* \rangle) > 0, Re(\langle S(y), x^* \rangle) < 0\}$. Notemos que como T^q es hipercíclico, $U \neq \emptyset$ y, más aún, contiene una bola no vacía V de X tal que $\overset{\circ}{V} \subset U$. Entonces, como T^q es \mathcal{AP}_* -hipercíclico, la Proposición

6.1.8 implica que existen $x \in \overset{\circ}{V}^{\omega^*}$ y $m \in \mathbb{N}$ para los cuales $S^{jm}(x) \in \overset{\circ}{V}^{\omega^*}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. En particular $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|N_S(x, U) \cap [0, k]|}{k+1} \geq \frac{1}{m} > 0$.

Concluimos que $S - I$ y luego $T - \lambda I$ no son cuasinilpotentes para $|\lambda| = 1$ de ángulo racional.

Supongamos ahora que θ es un ángulo irracional. Notemos que es suficiente probar que $S - I$ no es cuasinilpotente, donde $S = e^{-2\pi i \theta} T^{**}$.

Sea U el conjunto abierto de X^{**} definido en el Lema 6.2.1 para S . Como $e^{-2\pi i \theta} T$ es hipercíclico, U es no vacío y contiene una bola abierta V de X tal que $\overset{\circ}{V}^{\omega^*} \subset U$.

Para un $\delta > 0$ chico sea $V_\delta := \{x \in V : d(x, V^c) > \delta \text{ y } \|x\| < 1/\delta\}$. Como T es \mathcal{AP}_* -hipercíclico, por la Proposición 6.1.8, existe un $x \in \overset{\circ}{V}_\delta^{\omega^*}$ y m tal que $T^{jm}x \in \overset{\circ}{V}_\delta^{\omega^*} \subset U$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que si $\varepsilon < \delta^2/4\pi$, $y \in \overset{\circ}{V}_\delta^{\omega^*}$ y $\varphi \in p + (-\varepsilon, \varepsilon)$ para algún $p \in \mathbb{Z}$, entonces $e^{2\pi i \varphi} y \in \overset{\circ}{V}^{\omega^*} \subset U$. En efecto, si $z \notin \overset{\circ}{V}^{\omega^*}$,

$$\|e^{2\pi i \varphi} y - z\| \geq \|y - z\| - \|y(1 - e^{2\pi i \varphi})\| \geq \delta - \frac{1}{\delta} \varepsilon 2\pi > \delta/2.$$

Definamos ahora

$$A := \{j : -jm\theta \in p + (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ para algún } p \in \mathbb{Z}\}.$$

Como $m\theta$ es irracional, $\underline{\text{dens}}(A) > 0$, y por la afirmación,

$$A \subset \{j : S^{mj}x \in U\}.$$

Luego

$$0 < \underline{\text{dens}}(A) \leq m \cdot \underline{\text{dens}}(N_S(x, U)).$$

Aplicando el Lema 6.2.1 concluimos que $S - I$ no es cuasinilpotente. \square

Corolario 6.2.3. *El espectro de un operador \mathcal{AP}_* -hipercíclico no tiene puntos aislados.*

Demostración. Si λ es un punto aislado de un operador hipercíclico entonces por el Teorema de descomposición de Riesz y el hecho de que la propiedad de ser \mathcal{AP}_* -hipercíclico se preserva por cuasiconjugación, podemos suponer que $\sigma(T) = \lambda$. Es decir, T se puede escribir de la forma $S + \lambda Id$ con S cuasinilpotente. Además el hecho de que T sea hipercíclico implica que $|\lambda| = 1$. Esto contradice el Teorema 6.2.2. \square

Corolario 6.2.4. *No hay operadores \mathcal{AP}_* -hipercíclicos en espacios de Banach hereditariamente indescomponibles.*

6.3. Operadores coshift

En esta sección estudiaremos operadores coshift con conjuntos periódicos densos. Probamos también la existencia de un operador en c_0 que es \mathcal{AP}_* -hipercíclico pero no tiene conjuntos periódicos densos y luego no es caótico.

Para encontrar un ejemplo de un operador \mathcal{AP}_* -hipercíclico que no es caótico vamos a estudiar operadores coshift sobre c_0 . Es sabido [54, Teorema 8] que un operador coshift definido en un espacio de Fréchet sobre una base incondicional $\{e_n\}$ es caótico si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n \in X. \quad (6.2)$$

Teorema 6.3.1. *Sea $\{e_n\}_n$ una base incondicional en un espacio de Fréchet X y $B : X \rightarrow X$ el operador coshift sobre $\{e_n\}$. Entonces B es caótico si y sólo si tiene conjuntos periódicos densos.*

Demostración. Por (6.2) es suficiente probar que $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ es convergente.

Sea ρ una seminorma continua tal que para todo x , $|x_1| \leq \rho(x)$. Como B tiene conjuntos periódicos densos existe $k \in \mathbb{N}$ y x tal que $B^{kn}(x) \in \frac{1}{4}\{y : \rho(y) < 1\} + e_1$ para todo $n \geq 0$. Luego $|x_1| \geq 1 - \frac{1}{4}$ y $\rho(B^{nk}(x) - x) < \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces tenemos que $|x_1 - x_{1+nk}| = |e_1^*(x - B^{nk}(x))| < \frac{1}{2}$ para todo n . Luego, $x_{1+nk} = (x_1 + \delta_n)$, donde δ_n es un número de módulo menor que $\frac{1}{2}$. Notemos que $x_{1+nk} \neq 0$ para todo n .

Consideramos ahora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e_{1+nk} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_1 + \delta_n} x_{1+nk} e_{1+nk}$, que es (incondicionalmente) convergente debido a la incondicionalidad de $\{e_n\}$. Finalmente notemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n \geq 1} e_{1+nk-j} = \sum_{j=0}^{k-1} B^j \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x_1 + \delta_n} x_{1+nk} e_{1+nk} \right),$$

que es convergente. Concluimos que B es caótico. \square

Corolario 6.3.2. *Sea $\{e_n\}_n$ una base incondicional en un espacio de Fréchet X y sea $B_\omega : X \rightarrow X$ un operador coshift pesado sobre $\{e_n\}$. Entonces B_ω es caótico si y sólo si tiene conjuntos periódicos densos.*

Por otro lado mostraremos ahora que hay operadores coshift pesados en c_0 que son \mathcal{AP}_* -hipercíclicos pero no son ni upper-frecuentemente hipercíclicos ni caóticos. En [25] los autores exhibieron un ejemplo de un operador coshift en c_0 reiterativamente hipercíclico que no es ni upper frecuentemente hipercíclico ni caótico.

Un mirada en su prueba revela que de hecho el operador es \mathcal{AP}_* -hipercíclico.

Teorema 6.3.3. *Sea $S = \bigcup_{l,j} [l10^j - j, l10^j + j]$ y (w_n) la sucesión definida como*

$$w_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \in S \\ \prod_{l=1}^{n-1} w_l^{-1} & \text{si } n \in S + 1 \setminus S \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces $T := B_\omega : c_0 \rightarrow c_0$ es \mathcal{AP}_ -hipercíclico y no es caótico.*

Notemos que por el Teorema 6.3.1, esto implica que el operador es \mathcal{AP}_* pero no tiene conjuntos periódicos densos.

El argumento principal utilizado por los autores para probar que el operador es reiterativamente hipercíclico es que T satisface el criterio de \mathcal{F} -hiperciclicidad aplicado a la familia de conjuntos con densidad superior de Banach positiva. Recordemos el criterio aplicado a operadores coshift pesados sobre ℓ_p o c_0 .

Teorema 6.3.4 (Bès, Menet, Peris, Puig). *Sea \mathcal{F} una familia de Furstenberg. Supongamos que existen conjuntos disjuntos $(A_k)_k \subseteq \mathcal{F}$ tal que*

i) *para todo $j \in A_k$, todo $j' \in A_{k'}$, $j \neq j'$ tenemos que $|j - j'| \geq \max\{k, k'\}$;*

ii) *para todo $k' \geq 0$ y todo $k > k'$*

$$\sum_{n \in A_k + k'} \frac{e_n}{\prod_{v=1}^n w_v} \in X \text{ y } \sum_{n \in A_k + k'} \frac{e_n}{\prod_{v=1}^n w_v} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0;$$

iii) *Existe $(C_{k,l})_{k,l}$ tal que para todo $k' \geq 0$, todo $k > k'$ y todo $l \geq 1$,*

$$\sup_{j \in A_l} \left\| \sum_{n \in A_k - j} \frac{e_{n+k'}}{\prod_{v=1}^n w_{v+k'}} \right\| \leq C_{k,l}$$

y tal que $\sup_l C_{k,l} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ y tal que para todo k , $C_{k,l} \rightarrow 0$ cuando $l \rightarrow \infty$.

Entonces B_w es \mathcal{F} -hipercíclico en $X = \ell_p$ o c_0 .

Prueba del Teorema 6.3.3. Bès et. al. [25] probaron que el operador no es upper-frecuentemente hipercíclico. Como los operadores coshift pesados que son caóticos son también frecuentemente hipercíclicos, concluimos que el operador no es caótico.

En [25], fueron construidos conjuntos $(A_k)_k$ de densidad superior de Banach positiva que cumplen las condiciones *i - iii* del criterio de arriba. Para probar que el operador T es \mathcal{AP}_* -hipercíclico, es suficiente mostrar que los conjuntos $(A_k)_k$ elegidos por los autores pertenecen a \mathcal{AP}_* .

Cada A_k se define como $\bigcup_{j \in \phi^{-1}(k)} F_j$, donde los $\phi^{-1}(k)$ son conjuntos infinitos disjuntos de \mathbb{N} y los F_j son definidos como $F_{j+1} := \{10^{j_0} + 10^{2k}l : 0 \leq l \leq l_0\}$, donde $l_0 > j$ y j_0 es suficientemente grande (se define por inducción). Luego, para cada $j \in \phi^{-1}(k)$ cada conjunto F_{j+1} es una progresión aritmética de longitud más grande que j con paso 10^{2k} . Como el conjunto $\phi^{-1}(k)$ es infinito, concluimos que los conjuntos A_k tienen progresiones arbitrariamente grandes de paso 10^{2k} . \square

6.4. Comentarios finales y preguntas

Nos gustaría terminar este capítulo con algunas preguntas relacionadas con los resultados discutidos en los capítulos anteriores.

La prueba del Teorema 6.1.10 yace en la normabilidad del espacio. En efecto, usamos que las bolas son débil* compactas con interior no vacío.

Pregunta 6.4.1. *¿Es cierto el Teorema 6.1.10 para espacios de Fréchet no normables?*

En el Teorema 6.3.3 mostramos la existencia de un operador \mathcal{AP}_* -hipercíclico que no es caótico. Por el Teorema 6.3.1 esto implica que el operador no tiene conjuntos periódicos densos. De hecho, no logramos encontrar un ejemplo de un operador con conjuntos periódicos densos que no sea caótico.

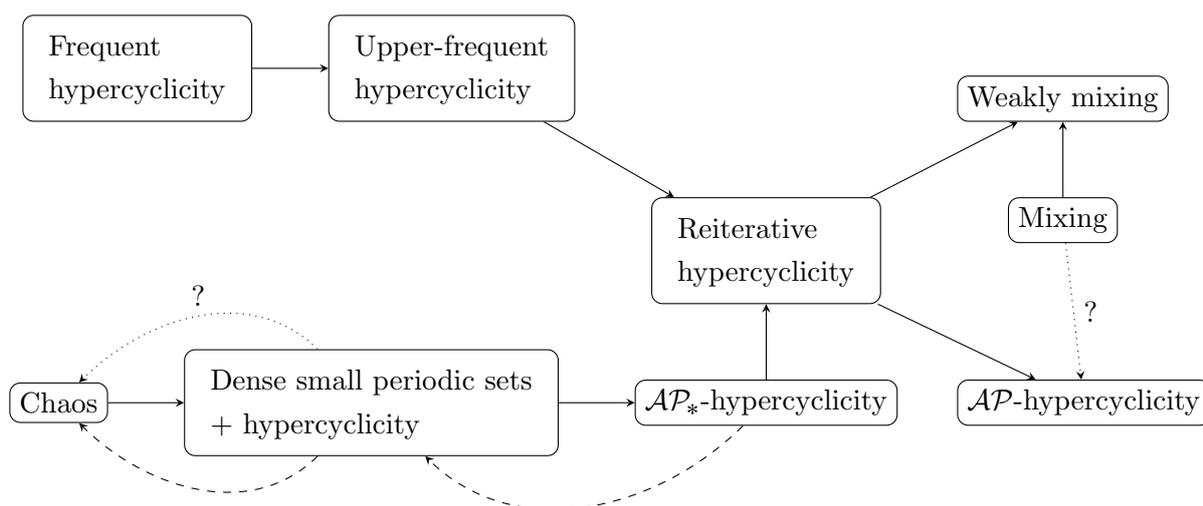
Pregunta 6.4.2. *¿Es todo operador hipercíclico con conjuntos periódicos densos necesariamente caótico? ¿Más en general, tiene que tener dicho operador algún punto periódico?*

Respondimos la Pregunta 6.0.2 para una clase grande de operadores y espacios. Sin embargo, la pregunta general sobre la existencia de una familia \mathcal{F} para la cual \mathcal{F} -hiperciclicidad sea equivalente a caos sigue abierta.

En la Sección 5.1 mostramos que existen operadores coshift que son weakly mixing y no \mathcal{AP} -hipercíclicos y que todo operador coshift que es mixing es \mathcal{AP} -hipercíclico. Sin embargo, no sabemos lo siguiente.

Pregunta 6.4.3. *¿Es todo operador mixing necesariamente \mathcal{AP} -hipercíclico? ¿O equivalentemente, es todo operador mixing múltiplemente recurrente?*

El siguiente diagrama muestra las implicaciones conocidas entre los conceptos desarrollados en los Caítulos 5 y 6: un flecha sólida indica que vale la implicación. Una flecha rayada indica que vale la implicación con una hipótesis extra (en este caso ω^* - ω^* continuidad). Para las flechas punteadas no conocemos su validez en general y son las Preguntas 6.4.2 y 6.4.3). Todas las demás implicaciones se sabe que son falsas.



Bibliografía

- [1] S. I. Ansari. Hypercyclic and cyclic vectors. *J. Funct. Anal.*, 128(2):374–383, 1995.
- [2] S. I. Ansari. Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces. *Journal of Functional Analysis*, 148(2):384–390, 1997.
- [3] J. Appell, E. De Pascale, and A. Vignoli. *Nonlinear spectral theory*, volume 10. Walter de Gruyter, 2004.
- [4] R. M. Aron, J. A. Conejero, A. Peris, and J. B. Seoane-Sepúlveda. Powers of hypercyclic functions for some classical hypercyclic operators. *Integral Equations and Operator Theory*, 58(4):591–596, 2007.
- [5] R. M. Aron and D. Markose. On universal functions. *J. Korean Math. Soc.*, 41(1):65–76, 2004. Satellite Conference on Infinite Dimensional Function Theory.
- [6] R. M. Aron and A. Miralles. Chaotic polynomials in spaces of continuous and differentiable functions. *Glasg. Math. J.*, 50(2):319–323, 2008.
- [7] J. Auslander and J. A. Yorke. Interval maps, factors of maps, and chaos. *Tohoku Math. J. (2)*, 32(2):177–188, 1980.
- [8] C. Badea, S. Grivaux, and V. Müller. Multiples of hypercyclic operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(4):1397–1403, 2009.
- [9] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey. On Devaney’s definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, 99(4):332–334, 1992.
- [10] F. Bayart and S. Grivaux. Frequently hypercyclic operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(11):5083–5117 (electronic), 2006.
- [11] F. Bayart and S. Grivaux. Invariant Gaussian measures for operators on Banach spaces and linear dynamics. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 94(1):181–210, 2007.
- [12] F. Bayart and E. Matheron. Hypercyclic operators failing the hypercyclicity criterion on classical Banach spaces. *Journal of Functional Analysis*, 250(2):426–441, 2007.

-
- [13] F. Bayart and E. Matheron. *Dynamics of linear operators*, volume 179 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [14] F. Bayart and E. Matheron. (Non-)weakly mixing operators and hypercyclicity sets. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(1):1–35, 2009.
- [15] B. Beauzamy. *Introduction to operator theory and invariant subspaces*, volume 42. Elsevier, 1988.
- [16] T. Bermúdez, A. Bonilla, F. Martínez-Giménez, and A. Peris. Li–Yorke and distributionally chaotic operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 373(1):83–93, 2011.
- [17] T. Bermúdez, A. Bonilla, and A. Peris. \mathbb{C} -supercyclic versus \mathbb{R}^+ -supercyclic operators. *Archiv der Mathematik*, 79(2):125–130, 2002.
- [18] L. Bernal-González. On hypercyclic operators on Banach spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 127(4):1003–1010, 1999.
- [19] L. Bernal-González. Disjoint hypercyclic operators. *Studia Math.*, 182(2):113–131, 2007.
- [20] N. Bernardes, A. Bonilla, V. Müller, and A. Peris. Li–Yorke chaos in linear dynamics. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 35(6):1723–1745, 2015.
- [21] N. C. Bernardes. On orbits of polynomial maps in Banach spaces. *Quaest. Math.*, 21(3-4):311–318, 1998.
- [22] N. C. Bernardes and A. Peris. On the existence of polynomials with chaotic behaviour. *Journal of Function Spaces and Applications*, 2013.
- [23] N. Bernardes Jr, A. Bonilla, V. Müller, and A. Peris. Distributional chaos for linear operators. *Journal of Functional Analysis*, 265(9):2143–2163, 2013.
- [24] J. Bès and J. A. Conejero. An extension of hypercyclicity for N -linear operators. In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2014. Hindawi Publishing Corporation, 2014.
- [25] J. Bès, Q. Menet, A. Peris, and Y. Puig. Recurrence properties of hypercyclic operators. *Mathematische Annalen*, 366(1-2):545–572, 2016.
- [26] J. Bès and A. Peris. Hereditarily hypercyclic operators. *J. Funct. Anal.*, 167(1):94–112, 1999.
- [27] J. Bès and A. Peris. Disjointness in hypercyclicity. *J. Math. Anal. Appl.*, 336(1):297–315, 2007.
- [28] J. P. Bes. *Three problems on hypercyclic operators*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1998. Thesis (Ph.D.)—Kent State University.

-
- [29] G. D. Birkhoff. Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières. *C. R.*, 189:473–475, 1929.
- [30] L. S. Block and W. A. Coppel. *Dynamics in one dimension*, volume 1513 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [31] J. Bonet and A. Peris. Hypercyclic operators on non-normable Fréchet spaces. *J. Funct. Anal.*, 159(2):587–595, 1998.
- [32] A. Bonilla and K.-G. Grosse-Erdmann. Frequently hypercyclic operators and vectors. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 27(2):383–404, 2007.
- [33] A. Bonilla and K.-G. Grosse-Erdmann. Upper frequent hypercyclicity and related notions. *Revista Matemática Complutense*, 31(3):673–711, 2018.
- [34] R. Cardeccia. Hypercyclic bilinear operators on banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 485(1):123771, 2020.
- [35] R. Cardeccia and S. Muro. Hypercyclic homogeneous polynomials on $H(\mathbb{C})$. *J. Approx. Theory*, 226:60–72, 2018.
- [36] R. Cardeccia and S. Muro. Arithmetic progressions and chaos in linear dynamics. *arXiv preprint arXiv:2003.07161*, 2020.
- [37] R. Cardeccia and S. Muro. Orbits of homogeneous polynomials on banach spaces. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, page 1–29, 2020.
- [38] K. C. Chan and R. Sanders. A weakly hypercyclic operator that is not norm hypercyclic. *Journal of Operator Theory*, 52(1):39–59, 2004.
- [39] S. Charpentier, R. Ernst, and Q. Menet. Γ -supercyclicity. *J. Funct. Anal.*, 270(12):4443–4465, 2016.
- [40] C.-C. Chen. Recurrence for weighted translations on groups. *Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.)*, 36(2):443–452, 2016.
- [41] C.-C. Chen. Recurrence of cosine operator functions on groups. *Canad. Math. Bull.*, 59(4):693–704, 2016. [Paging previously given as 1–12].
- [42] C.-C. Chen. Dynamics of weighted translations on orlicz spaces. *Collectanea Mathematica*, pages 1–15, 2018.
- [43] G. Costakis, A. Manoussos, and I. Parissis. Recurrent linear operators. *Complex Anal. Oper. Theory*, 8(8):1601–1643, 2014.
- [44] G. Costakis and I. Parissis. Szemerédi's theorem, frequent hypercyclicity and multiple recurrence. *Mathematica Scandinavica*, pages 251–272, 2012.

-
- [45] M. de la Rosa and C. Read. A hypercyclic operator whose direct sum $T \oplus T$ is not hypercyclic. *J. Operator Theory*, 61(2):369–380, 2009.
- [46] R. L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Studies in Nonlinearity. Westview Press, Boulder, CO, 2003. Reprint of the second (1989) edition.
- [47] T.-C. Dinh and N. Sibony. Dynamics in several complex variables: endomorphisms of projective spaces and polynomial-like mappings. In *Holomorphic dynamical systems*, pages 165–294. Springer, 2010.
- [48] N. S. Feldman. Perturbations of hypercyclic vectors. *J. Math. Anal. Appl.*, 273(1):67–74, 2002.
- [49] G. Godefroy and J. H. Shapiro. Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds. *J. Funct. Anal.*, 98(2):229–269, 1991.
- [50] L. B. González and A. M. Rodríguez. Non-finite-dimensional closed vector spaces of universal functions for composition operators. *J. Approx. Theory*, 82(3):375–391, 1995.
- [51] W. T. Gowers. A new proof of szemerédi’s theorem. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 11(3):465–588, 2001.
- [52] B. Green and T. Tao. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. *Ann. of Math. (2)*, 167(2):481–547, 2008.
- [53] S. Grivaux. Hypercyclic operators, mixing operators, and the bounded steps problem. *Journal of Operator Theory*, pages 147–168, 2005.
- [54] K. Grosse-Erdmann. Hypercyclic and chaotic weighted shifts. *Studia Math*, 139(1):47–68, 2000.
- [55] K.-G. Grosse-Erdmann. Universal families and hypercyclic operators. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 36(3):345–381, 1999.
- [56] K.-G. Grosse-Erdmann and S. G. Kim. Bihypercyclic bilinear mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 399(2):701–708, 2013.
- [57] K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris. Frequently dense orbits. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 341(2):123–128, 2005.
- [58] K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris Manguillot. *Linear chaos*. Universitext. Springer, London, 2011.
- [59] P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Vanderwerff, and V. Zizler. *Biorthogonal systems in Banach spaces*. Springer, New York, 2008.

-
- [60] D. A. Herrero. Limits of hypercyclic and supercyclic operators. *J. Funct. Anal.*, 99(1):179–190, 1991.
- [61] G. Herzog. On linear operators having supercyclic vectors. *Studia Math.*, 103(3):295–298, 1992.
- [62] H. M. Hilden and L. J. Wallen. Some cyclic and non-cyclic vectors of certain operators. *Indiana Univ. Math. J.*, 23:557–565, 1973/74.
- [63] W. Huang and X. Ye. Dynamical systems disjoint from any minimal system. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(2):669–694, 2005.
- [64] S. G. Kim, A. Peris, and H. G. Song. Numerically hypercyclic operators. *Integral Equations and Operator Theory*, 72(3):393–402, Mar 2012.
- [65] S. G. Kim, A. Peris, and H. G. Song. Numerically hypercyclic polynomials. *Archiv der Mathematik*, 99(5):443–452, Nov 2012.
- [66] C. Kitai. *Invariant Closed Sets for Linear Operators*. PhD thesis, Univ. of Toronto, 1982.
- [67] M. Krein and V. Šmulian. On regularly convex sets in the space conjugate to a banach space. *Annals of Mathematics*, pages 556–583, 1940.
- [68] F. León-Saavedra and V. Müller. Rotations of hypercyclic and supercyclic operators. *Integral Equations and Operator Theory*, 50(3):385–391, Nov 2004.
- [69] J. Li. Transitive points via Furstenberg family. *Topology Appl.*, 158(16):2221–2231, 2011.
- [70] T. Y. Li and J. A. Yorke. Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly*, 82(10):985–992, 1975.
- [71] G. R. MacLane. Sequences of derivatives and normal families. *J. Analyse Math.*, 2:72–87, 1952.
- [72] F. Martínez-Giménez and A. Peris. Existence of hypercyclic polynomials on complex Fréchet spaces. *Topology and its Applications*, 156(18):3007–3010, 2009.
- [73] F. Martínez-Giménez and A. Peris. Chaotic polynomials on sequence and function spaces. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(09):2861–2867, 2010.
- [74] R. Meise and D. Vogt. *Introduction to functional analysis*. Clarendon Press, 1997.
- [75] Q. Menet. Linear chaos and frequent hypercyclicity. *Transactions of the American Mathematical Society*, 369(7):4977–4994, 2017.
- [76] Q. Menet. Inverse of frequently hypercyclic operators. *arXiv preprint arXiv:1910.04452*, 2019.

-
- [77] A. Peris. Chaotic polynomials on Fréchet spaces. *Proc. Am. Math. Soc.*, 127(12):3601–3603, 1999.
- [78] A. Peris. Erratum to: “Chaotic polynomials on Fréchet spaces”. *Proc. Am. Math. Soc.*, 129(12):3759–3760, 2001.
- [79] A. Peris. Chaotic polynomials on Banach spaces. *Journal of mathematical analysis and applications*, 287(2):487–493, 2003.
- [80] Y. Puig. Frequent hypercyclicity and piecewise syndetic recurrence sets. *arXiv preprint arXiv:1703.09172*, 2017.
- [81] Y. Puig de Dios. Linear dynamics and recurrence properties defined via essential idempotents of $\beta\mathbb{N}$. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 38(1):285–300, 2018.
- [82] S. Rolewicz. On orbits of elements. *Stud. Math.*, 32:17–22, 1969.
- [83] F. L. Saavedra. The positive supercyclicity theorem. *Extracta Mathematicae*, 19(1):145–149, 2004.
- [84] H. N. Salas. Hypercyclic weighted shifts. *Transactions of the American Mathematical Society*, 347(3):993–1004, 1995.
- [85] H. H. Schaefer and M. P. Wolff. *Topological vector spaces. 2nd ed.*, volume 3. New York, NY: Springer, 2nd ed. edition, 1999.
- [86] B. Schweizer and J. Smítal. Measures of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems on the interval. *Transactions of the American Mathematical Society*, 344(2):737–754, 1994.
- [87] S. Shkarin. The Kitai criterion and backward shifts. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(5):1659–1670, 2008.
- [88] S. Shkarin. On the spectrum of frequently hypercyclic operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(1):123–134, 2009.
- [89] E. Szemerédi. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974)*, Vol. 2, pages 503–505, 1975.
- [90] A. Tychonoff. Ein fixpunktsatz. *Mathematische Annalen*, 111(1):767–776, 1935.
- [91] S. Vajda. *Fibonacci and Lucas numbers, and the golden section: theory and applications*. Courier Corporation, 2008.